

MODÈLE MATRICIEL EN DYNAMIQUE DU ROBOT PARALLÈLE STEWART-GOUGH

ȘTEFAN STAICU*

L'article établit des relations matricielles itératives d'analyse cinématique et dynamique du robot parallèle Stewart-Gough, schématisé dans l'espace par un réseau de chaînes cinématiques fermées. Sous l'action de six forces générées par des systèmes pneumatiques ou hydraulique indépendantes, les six actionneurs du mécanisme tridimensionnel effectueront des translations relatives. En connaissant le mouvement général de la plateforme, on développe le problème cinématique inverse et on détermine les positions, les vitesses et les accélérations des éléments composant le manipulateur. Basées sur le principe des travaux virtuels, les équations fondamentales de la dynamique des robots parallèles offrent des expressions récursives et des graphes pour les forces motrices des six actionneurs.

1. INTRODUCTION

Les robots industriels construits sont en général de type sériel, leur structure mobile étant une chaîne ouverte formée d'une succession de segments reliés entre eux par des liaisons à un seul degré de liberté. Dans le but de réduire les volumes et de diminuer les masses des corps en mouvement, certains robots comportent une ou plusieurs boucles fermées formant chacune un polygone articulé.

Concernant la précision, la rigidité ou la capacité de charge, les manipulateurs parallèles sont des mécanismes ayant des bonnes performances. Un robot à architecture parallèle contient en général deux plate-formes: l'une appartient au repère fixe et l'autre peut effectuer des mouvements arbitraires dans son espace de travail. Étant lié à la plate-forme mobile, l'effecteur du robot est mis en connexion avec la plate-forme fixe par l'intermédiaire des jambes mobiles d'architecture sérielle. Les liaisons des éléments du robot seront des couples sphériques, couples cylindriques ou bien couples prismatiques. Le nombre des éléments actifs est en général égal au nombre de degrés de liberté du manipulateur.

Les robots parallèles en comparaison avec les robots sériels ont des caractéristiques spéciales: rigidité et capacité dynamique de charge plus élevée, actionneurs immobiles, bonne précision d'orientation et un fonctionnement stable. La possibilité de choisir l'articulation que l'on veut motoriser permet de ramener

* Université "Politehnica" de Bucharest

les systèmes moteurs vers la base, donc de minimiser le nombre des masses mobiles. Équipés d'actionneurs hydrauliques ou pneumatiques, les manipulateurs parallèles disposent d'une construction robuste et peuvent déplacer rapidement des charges assez imposantes.

Le manipulateur parallèle Star de Hervé (Hervé et Sparacino [12]; Tremblay et Baron [30]) et le robot parallèle Delta (Staicu et Carp-Ciocardia [27]) conçu par Clavel [3] à l'École Polytechnique Fédérale de Lausanne et par Tsai et Stamper [32] à l'Université de Maryland sont équipés de trois moteurs en parallèle et entraînent l'effecteur en translation générale à trois degrés de liberté. L'analyse cinématique et dynamique directe d'un prototype de manipulateur sphérique Agile Wrist à trois rotations concourantes est développée par Gosselin et Angeles [1], [11]. L'application la plus connue est le simulateur de vol à six degrés de liberté, c'est-à-dire la plateforme Gough-Stewart (Stewart, [29]; Merlet, [18]; Parenti Castelli et Di Gregorio, [21]; Baron et Angeles, [2]).

2. MODÈLE CINÉMATIQUE DU ROBOT

Le manipulateur Stewart-Gough est un mécanisme tridimensionnel représenté par un réseau de chaînes parallèles, où la plate-forme mobile est mise en connexion avec la base fixe par six jambes extensibles. Détermination de la configuration instantanée du manipulateur est un sujet très important pour le contrôle de position ou de mouvement de la plate-forme.

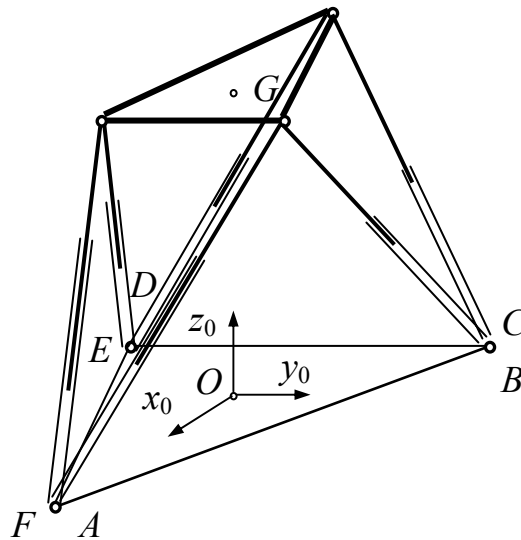


Fig. 1 – Schéma général du manipulateur.

L'article présent établit des relations matricielles analysant la cinématique et la dynamique d'un tel manipulateur à une configuration spéciale Stewart-Gough 3-3, où les articulations de connexion de la base ou de la plate-forme en mouvement coïncident deux à deux (Fig. 1).

La topologie d'une des six chaînes cinématiques du mécanisme est composée d'une liaison passive à Cardan, un système pneumatique actif rassemblant par une liaison prismatique deux éléments rigides et enfin une liaison passive sphérique appartenant à la plate-forme mobile (Fig. 2).

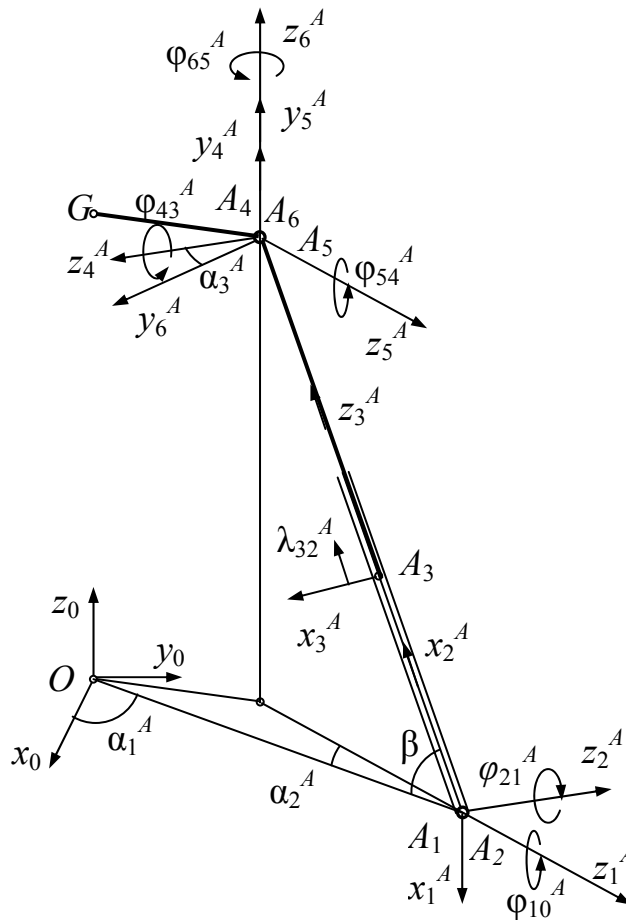


Fig. 2 – Schéma cinématique de la jambe A du manipulateur.

On considère le repère fixe $Ox_0y_0z_0$ (T_0) par rapport auquel se déplace un manipulateur parallèle à six degrés de liberté, ayant six pieds dont les éléments ont

des dimensions connues. Le premier corps de la jambe A est une croix de Cardan de petites dimensions, masse m_1 , tenseur d'inertie \hat{J}_1 , mise en rotation autour de l'axe $A_1 z_1^A$ avec la vitesse angulaire ω_{10}^A et l'accélération angulaire ε_{10}^A . La pièce cylindrique T_2^A liée au repère $A_2 x_2^A y_2^A z_2^A$, de longueur l_2 , masse m_2 et moment d'inertie \hat{J}_2 tourne d'un angle φ_{21}^A tel que $\omega_{21}^A = \dot{\varphi}_{21}^A$, $\varepsilon_{21}^A = \ddot{\varphi}_{21}^A$. Une liaison prismatique met en connexion avec le repère $A_3 x_3^A y_3^A z_3^A$ une tige rigide de longueur l_3 , masse m_3 et tenseur d'inertie \hat{J}_3 . Elle est mise en translation relative suivant $A_3 x_3^A$ avec le déplacement axial λ_{32}^A , la vitesse v_{32}^A et l'accélération γ_{32}^A .

Une deuxième croix à Cardan A_4 , de masse m_4 et tenseur d'inertie \hat{J}_4 , est entraînée ensuite en rotation avec une vitesse angulaire ω_{43}^A et l'accélération ε_{43}^A . Enfin, une dernière petite pièce A_5 de masse m_5 et de tenseur d'inertie \hat{J}_5 tourne d'un angle φ_{54}^A et transmette le mouvement vers la plate-forme mobile par une articulation cylindrique A_6 . Cette plate-forme est un triangle équilatéral de côté l_0 , masse m_6 et tenseur d'inertie \hat{J}_6 , tournant d'un angle relatif φ_{65}^A .

Les distances

$$\begin{aligned} OA_1 &= OB_1 = OC_1 = OD_1 = OE_1 = OF_1 = \\ &= GA_6 = GB_6 = GC_6 = GD_6 = GE_6 = GF_6 = l_0 \end{aligned} \quad (1)$$

et les angles suivants

$$\begin{aligned} \alpha_1^A &= \alpha_1^F = 0, \quad \alpha_1^B = \alpha_1^C = \frac{2\pi}{3}, \quad \alpha_1^D = \alpha_1^E = -\frac{2\pi}{3}, \\ \alpha_2^A &= \alpha_2^C = \alpha_2^E = -\frac{\pi}{3}, \quad \alpha_2^B = \alpha_2^D = \alpha_2^F = \frac{\pi}{3}, \\ \alpha_3^A &= \alpha_3^B = \alpha_3^C = \alpha_3^D = \alpha_3^E = \alpha_3^F = \frac{2\pi}{3} \end{aligned} \quad (2)$$

donnent la location des points de connexion des six jambes à la base fixe et la position initiale du robot

Puisqu'il s'agit d'un mécanisme à six degrés de liberté, sa position pourrait être déterminée par les déplacements relatifs $\lambda_{32}^A, \lambda_{32}^B, \lambda_{32}^C, \lambda_{32}^D, \lambda_{32}^E, \lambda_{32}^F$ des six actionneurs prismatiques ou bien par les coordonnées x_0^G, y_0^G, z_0^G du centre de masse de la plate-forme et encore par les angles d'Euler $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

En suivant la jambe A dans le sens $OA_1A_2A_3A_4A_5A_6$, les matrices de passage seront [24]:

$$\begin{aligned} a_{10} &= a_{10}^{\phi} \theta_1 a_{\alpha_2}^A a_{\alpha_1}^A, \quad a_{21} = a_{21}^{\phi} a_{\beta} \theta_2, \quad a_{32} = \theta_1, \\ a_{43} &= a_{43}^{\phi} a_{\beta} \theta_1, \quad a_{54} = a_{54}^{\phi} \theta_1, \quad a_{65} = a_{65}^{\phi} a_{\alpha_3}^A \theta_2, \end{aligned} \quad (3)$$

avec les notations

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \theta_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad a_{\alpha_i}^A = \begin{bmatrix} \cos \alpha_i^A & \sin \alpha_i^A & 0 \\ \sin \alpha_i^A & \cos \alpha_i^A & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (i=1, 2, 3) \\ a_{\beta} &= \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad a_{\phi_{k,k-1}}^{\phi} = \begin{bmatrix} \cos \phi_{k,k-1}^A & \sin \phi_{k,k-1}^A & 0 \\ -\sin \phi_{k,k-1}^A & \cos \phi_{k,k-1}^A & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$a_{k0} = \prod_{j=1}^k a_{k-j+1, k-j} \quad (k=1, 2, 3, 4, 5, 6).$$

Supposons que le mouvement général de la plateforme est exprimé par les coordonnées du centre G

$$\begin{aligned} \vec{r}_0^G &= [x_0^G \quad y_0^G \quad z_0^G]^T, \\ x_0^G &= x_0^{G*} \sin\left(\frac{2\pi}{3}t\right), \\ y_0^G &= y_0^{G*} \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right)\right], \\ z_0^G &= h + z_0^{G*} \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right)\right] \end{aligned} \quad (5)$$

et les angles de rotation autour de G

$$\alpha_i = \alpha_i^* \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right)\right] \quad (i=1, 2, 3). \quad (6)$$

La matrice générale a des rotations successives autour des axes Gx, Gy, Gz est construite à l'aide de ces trois angles $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_1 & \sin \alpha_1 \\ 0 & -\sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} \cos \alpha_2 & 0 & -\sin \alpha_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha_2 & 0 & \cos \alpha_2 \end{bmatrix},$$

$$a_3 = \begin{bmatrix} \cos \alpha_3 & \sin \alpha_3 & 0 \\ -\sin \alpha_3 & \cos \alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad a = a_3 a_2 a_1. \quad (7)$$

Alors, les conditions géométriques de rotation de a plateforme seront données par les identités

$$a_{60}^{\circ T} a_{60} = b_{60}^{\circ T} b_{60} = c_{60}^{\circ T} c_{60} = d_{60}^{\circ T} d_{60} = e_{60}^{\circ T} e_{60} = f_{60}^{\circ T} f_{60} = a, \quad (8)$$

où

$$a_{60}^{\circ} = a_{\alpha_3}^A \theta_2 \theta_1 a_{\beta} \theta_1 a_{\beta} \theta_2 \theta_1 a_{\alpha_2}^A a_{\alpha_1}^A. \quad (9)$$

Les valeurs des variables φ_{10}^A , φ_{21}^A , λ_{32}^A , φ_{43}^A , φ_{54}^A , φ_{65}^A sont déterminées par les relations de contrainte suivantes

$$\begin{aligned} \vec{r}_{10}^A + \sum_{k=1}^5 a_{k0}^T \vec{r}_{k+1,k}^A + a_{60}^T \vec{r}_6^{GA} &= \\ = \vec{r}_{10}^B + \sum_{k=1}^5 b_{k0}^T \vec{r}_{k+1,k}^B + b_{60}^T \vec{r}_6^{GB} &= \\ = \vec{r}_{10}^C + \sum_{k=1}^5 c_{k0}^T \vec{r}_{k+1,k}^C + c_{60}^T \vec{r}_6^{GC} &= \\ = \vec{r}_{10}^D + \sum_{k=1}^5 d_{k0}^T \vec{r}_{k+1,k}^D + d_{60}^T \vec{r}_6^{GD} &= \\ = \vec{r}_{10}^E + \sum_{k=1}^5 e_{k0}^T \vec{r}_{k+1,k}^E + e_{60}^T \vec{r}_6^{GE} &= \\ = \vec{r}_{10}^F + \sum_{k=1}^5 f_{k0}^T \vec{r}_{k+1,k}^F + f_{60}^T \vec{r}_6^{GF} = \vec{r}_0^G & \end{aligned} \quad (10)$$

et les notations

$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{u}}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{u}}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{u}}_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\vec{r}_{10}^A = l_0 \mathbf{a}_{\alpha_1}^A \tilde{\mathbf{u}}_1, \quad \vec{r}_{21}^A = \vec{0}, \quad \vec{r}_{32}^A = l_1 \tilde{\mathbf{u}}_1 + \lambda_{32}^A \mathbf{a}_{32}^A \tilde{\mathbf{u}}_3$$

$$\vec{r}_{43}^A = l_3 \tilde{\mathbf{u}}_3, \quad \vec{r}_{54}^A = \vec{0}, \quad \vec{r}_{65}^A = \vec{0}, \quad \vec{r}_6^{GA} = l_0 \tilde{\mathbf{u}}_1.$$

Les mouvements des éléments de la jambe A du robot, par exemple, seront caractérisés par des matrices antisymétriques (Staicu [25]):

$$\tilde{\omega}_{k0}^A = \mathbf{a}_{k,k-1}^A \tilde{\omega}_{k-1,0}^A \mathbf{a}_{k,k-1}^T + \omega_{k,k-1}^A \tilde{\mathbf{u}}_3, \quad (12)$$

associées aux vitesses angulaires absolues données par les formules de récurrence

$$\tilde{\omega}_{k0}^A = \mathbf{a}_{k,k-1}^A \tilde{\omega}_{k-1,0}^A + \omega_{k,k-1}^A \tilde{\mathbf{u}}_3, \quad \omega_{k,k-1}^A = \dot{\phi}_{k,k-1}^A. \quad (13)$$

Les vitesses $\vec{\mathbf{v}}_{k0}^A$ des centres A_k des articulations sont exprimées par es relations

$$\vec{\mathbf{v}}_{k0}^A = \mathbf{a}_{k,k-1}^A \vec{\mathbf{v}}_{k-1,0}^A + \mathbf{a}_{k,k-1}^A \tilde{\omega}_{k-1,0}^A \vec{\mathbf{r}}_{k,k-1}^A + \vec{\mathbf{v}}_{k,k-1}^A. \quad (14)$$

En supposant que le mouvement absolu de la plate-forme mobile est donné par les relations (5) et (6), on développe le problème cinématique inverse et on évalue les vitesses et les accélérations des éléments du manipulateur. C'est pour cela que nous faisons le graphe du mécanisme, tout en représentant les corps par des points et les liaisons par des segments reliant ces points. *Les conditions de connectivité* des vitesses relatives sont exprimées tout en suivant les contraintes de chacun des cycles indépendants du graphe associé au manipulateur.

Le modèle cinématique inverse est représenté par les équations matricielles des contraintes cinématiques

$$\begin{aligned} & \omega_{10}^A \tilde{\mathbf{u}}_1^T \mathbf{a}_{10}^T \tilde{\mathbf{u}}_3 + \omega_{21}^A \tilde{\mathbf{u}}_2^T \mathbf{a}_{20}^T \tilde{\mathbf{u}}_3 + \omega_{43}^A \tilde{\mathbf{u}}_4^T \mathbf{a}_{40}^T \tilde{\mathbf{u}}_3 + \\ & + \omega_{54}^A \tilde{\mathbf{u}}_5^T \mathbf{a}_{50}^T \tilde{\mathbf{u}}_3 + \omega_{65}^A \tilde{\mathbf{u}}_6^T \mathbf{a}_{60}^T \tilde{\mathbf{u}}_3 = \\ & = \tilde{\mathbf{u}}_i^T \{ \dot{\alpha}_1 \mathbf{a}_1^T \tilde{\mathbf{u}}_1 + \dot{\alpha}_2 \mathbf{a}_2^T \tilde{\mathbf{u}}_2 + \dot{\alpha}_3 \mathbf{a}_3^T \tilde{\mathbf{u}}_3 \}, \quad (15) \\ & \omega_{10}^A \tilde{\mathbf{u}}_1^T \mathbf{a}_{10}^T \tilde{\mathbf{u}}_3 \{ \mathbf{a}_{21}^T \vec{r}_{32}^A + \mathbf{a}_{31}^T \vec{r}_{43}^A + \mathbf{a}_{61}^T \vec{r}_6^{GA} \} + \\ & + \omega_{21}^A \tilde{\mathbf{u}}_2^T \mathbf{a}_{20}^T \tilde{\mathbf{u}}_3 \{ \vec{r}_{32}^A + \mathbf{a}_{32}^T \vec{r}_{43}^A + \mathbf{a}_{62}^T \vec{r}_6^{GA} \} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + v_{32}^A \vec{u}_i^T a_{30}^T \vec{u}_3 + \omega_{43}^A \vec{u}_i^T a_{40}^T \tilde{u}_3 a_{64}^T \vec{r}_6^{GA} + \\
& + \omega_{54}^A \vec{u}_i^T a_{50}^T \tilde{u}_3 a_{65}^T \vec{r}_6^{GA} + \omega_{65}^A \vec{u}_i^T a_{60}^T \tilde{u}_3 \vec{r}_6^{GA} = \vec{u}_i^T \dot{\vec{r}}_0^G \quad (i = 1, 2, 3).
\end{aligned}$$

Ces relations fournissent les vitesses relatives $\omega_{10}^A, \omega_{21}^A, v_{32}^A, \omega_{43}^A, \omega_{54}^A, \omega_{65}^A$ en fonction de la vitesse du centre G et des composantes $\dot{\alpha}_1, \dot{\alpha}_2, \dot{\alpha}_3$ de la vitesse angulaire de la plate-forme. Des expressions semblables s'obtiendront si l'on va parcourir les autres cycles indépendants. Exprimé par les relations (15), le Jacobian du mécanisme est un élément essentiel pour l'analyse de l'espace de travail du manipulateur.

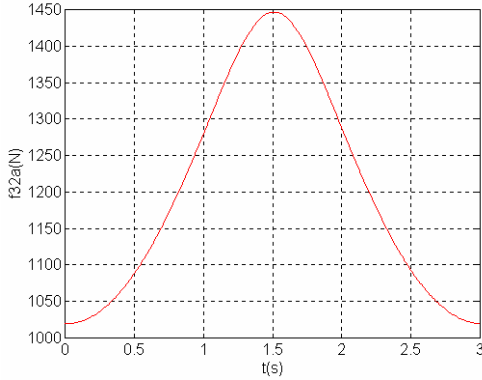


Fig. 3 – Force f_{32}^A de l'actionneur A .

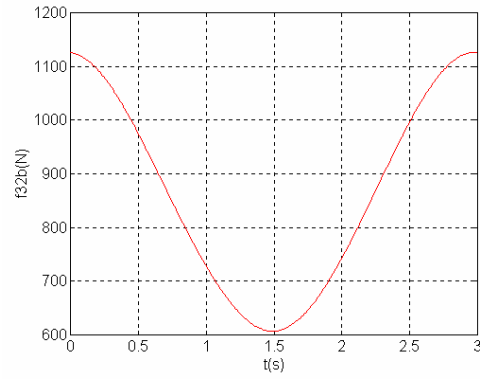


Fig. 4 – Force f_{32}^B de l'actionneur B .

Supposons maintenant que le manipulateur est mis en mouvement virtuel déterminé par les vitesses $v_{32a}^{Av} = 1, v_{32a}^{Bv} = 0, v_{32a}^{Cv} = 0, v_{32a}^{Dv} = 0, v_{32a}^{Ev} = 0, v_{32a}^{Fv} = 0$. Des vitesses virtuelles caractéristiques exprimées en fonction de la position du manipulateur sont fournies par certaines conditions de connectivité des vitesses relatives des six jambes:

$$\vec{u}_i^T a_{60}^T \vec{\omega}_{60a}^{Av} = \vec{u}_i^T a^T \vec{\omega}_a^v, \quad \vec{u}_i^T a_{60}^T \{ \vec{v}_{60a}^{Av} + \tilde{\omega}_{60a}^{Av} \vec{r}_6^{GA} \} = \vec{u}_i^T a^T \vec{v}_a^{Gv}. \quad (16)$$

Faisant successivement $v_{32b}^{Bv} = 1, v_{32c}^{Cv} = 1, v_{32d}^{Dv} = 1, v_{32e}^{Ev} = 1, v_{32f}^{Fv} = 1$, nous aurons d'autres relations de compatibilité des vitesses virtuelles.

Concernant les accélérations relatives $\varepsilon_{10}^A, \varepsilon_{21}^A, \gamma_{32}^A, \varepsilon_{43}^A, \varepsilon_{54}^A, \varepsilon_{65}^A$ du robot, celles-ci sont données par les relations de connectivité suivantes

$$\varepsilon_{10}^A \vec{u}_i^T a_{10}^T \vec{u}_3 + \varepsilon_{21}^A \vec{u}_i^T a_{20}^T \vec{u}_3 + \varepsilon_{43}^A \vec{u}_i^T a_{40}^T \vec{u}_3 + \varepsilon_{54}^A \vec{u}_i^T a_{50}^T \vec{u}_3 +$$

$$\begin{aligned}
& +\varepsilon_{65}^A \vec{u}_i^T a_{60}^T \vec{u}_3 = \vec{u}_i^T \{ \ddot{\alpha}_1 a_1^T \vec{u}_1 + \ddot{\alpha}_2 a_1^T a_2^T \vec{u}_2 + \ddot{\alpha}_3 a_1^T a_2^T a_3^T \vec{u}_3 + \\
& + \dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 a_1^T \vec{u}_1 a_2^T \vec{u}_2 + \dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_3 a_1^T a_2^T \vec{u}_2 a_3^T \vec{u}_3 + \dot{\alpha}_3 \dot{\alpha}_1 a_1^T \vec{u}_1 a_2^T a_3^T \vec{u}_3 - \\
& - \omega_{10}^A \omega_{21}^A a_{10}^T \vec{u}_3 a_{21}^T \vec{u}_3 - \omega_{10}^A \omega_{43}^A a_{10}^T \vec{u}_3 a_{41}^T \vec{u}_3 - \omega_{10}^A \omega_{54}^A a_{10}^T \vec{u}_3 a_{51}^T \vec{u}_3 - \\
& - \omega_{10}^A \omega_{65}^A a_{10}^T \vec{u}_3 a_{61}^T \vec{u}_3 - \omega_{21}^A \omega_{43}^A a_{20}^T \vec{u}_3 a_{42}^T \vec{u}_3 - \omega_{21}^A \omega_{54}^A a_{20}^T \vec{u}_3 a_{52}^T \vec{u}_3 - \\
& \quad - \omega_{21}^A \omega_{65}^A a_{20}^T \vec{u}_3 a_{62}^T \vec{u}_3 - \omega_{43}^A \omega_{54}^A a_{40}^T \vec{u}_3 a_{54}^T \vec{u}_3 - \\
& \quad - \omega_{43}^A \omega_{65}^A a_{40}^T \vec{u}_3 a_{64}^T \vec{u}_3 - \omega_{54}^A \omega_{65}^A a_{50}^T \vec{u}_3 a_{65}^T \vec{u}_3 \}, \\
& \quad \varepsilon_{10}^A \vec{u}_i^T a_{10}^T \vec{u}_3 \{ a_{21}^T \vec{r}_{32}^A + a_{31}^T \vec{r}_{43}^A + a_{61}^T \vec{r}_6^{GA} \} + \\
& \quad + \varepsilon_{21}^A \vec{u}_i^T a_{20}^T \vec{u}_3 \{ \vec{r}_{32}^A + a_{32}^T \vec{r}_{43}^A + a_{62}^T \vec{r}_6^{GA} \} + \\
& \quad + \gamma_{32}^A \vec{u}_i^T a_{30}^T \vec{u}_3 + \varepsilon_{43}^A \vec{u}_i^T a_{40}^T \vec{u}_3 a_{64}^T \vec{r}_6^{GA} + \\
& \quad + \varepsilon_{54}^A \vec{u}_i^T a_{50}^T \vec{u}_3 a_{65}^T \vec{r}_6^{GA} + \varepsilon_{65}^A \vec{u}_i^T a_{60}^T \vec{u}_3 \vec{r}_6^{GA} = \vec{u}_i^T \ddot{\vec{r}}_0^G - \\
& \quad - \omega_{10}^A \omega_{10}^A \vec{u}_i^T a_{10}^T \vec{u}_3 \{ a_{21}^T \vec{r}_{32}^A + a_{31}^T \vec{r}_{43}^A + a_{61}^T \vec{r}_6^{GA} \} - \\
& \quad - \omega_{21}^A \omega_{21}^A \vec{u}_i^T a_{20}^T \vec{u}_3 \{ \vec{r}_{32}^A + a_{32}^T \vec{r}_{43}^A + a_{62}^T \vec{r}_6^{GA} \} - \\
& \quad - \omega_{43}^A \omega_{43}^A \vec{u}_i^T a_{40}^T \vec{u}_3 a_{64}^T \vec{r}_6^{GA} - \omega_{54}^A \omega_{54}^A \vec{u}_i^T a_{50}^T \vec{u}_3 a_{65}^T \vec{r}_6^{GA} - \\
& \quad - \omega_{65}^A \omega_{65}^A \vec{u}_i^T a_{60}^T \vec{u}_3 \vec{r}_6^{GA} - \\
& \quad - 2\omega_{10}^A \omega_{21}^A \vec{u}_i^T a_{10}^T \vec{u}_3 a_{21}^T \vec{u}_3 \{ \vec{r}_{32}^A + a_{32}^T \vec{r}_{43}^A + a_{62}^T \vec{r}_6^{GA} \} - \\
& \quad - 2\omega_{10}^A \omega_{54}^A \vec{u}_i^T a_{10}^T \vec{u}_3 a_{51}^T \vec{u}_3 a_{65}^T \vec{r}_6^{GA} - 2\omega_{10}^A \omega_{65}^A \vec{u}_i^T a_{10}^T \vec{u}_3 a_{61}^T \vec{u}_3 \vec{r}_6^{GA} - \\
& \quad - 2\omega_{21}^A \omega_{43}^A \vec{u}_i^T a_{20}^T \vec{u}_3 a_{42}^T \vec{u}_3 a_{64}^T \vec{r}_6^{GA} - 2\omega_{21}^A \omega_{54}^A \vec{u}_i^T a_{20}^T \vec{u}_3 a_{52}^T \vec{u}_3 \vec{r}_6^{GA} - \\
& \quad - 2\omega_{21}^A \omega_{65}^A \vec{u}_i^T a_{20}^T \vec{u}_3 a_{62}^T \vec{u}_3 \vec{r}_6^{GA} - 2\omega_{43}^A \omega_{54}^A \vec{u}_i^T a_{40}^T \vec{u}_3 a_{54}^T \vec{u}_3 a_{65}^T \vec{r}_6^{GA} - \\
& \quad - 2\omega_{43}^A \omega_{65}^A \vec{u}_i^T a_{40}^T \vec{u}_3 a_{64}^T \vec{u}_3 \vec{r}_6^{GA} - 2\omega_{54}^A \omega_{65}^A \vec{u}_i^T a_{50}^T \vec{u}_3 a_{65}^T \vec{u}_3 \vec{r}_6^{GA} - \\
& \quad - 2\omega_{10}^A \omega_{32}^A \vec{u}_i^T a_{10}^T \vec{u}_3 a_{31}^T \vec{u}_3 - 2\omega_{21}^A \omega_{32}^A \vec{u}_i^T a_{20}^T \vec{u}_3 a_{32}^T \vec{u}_3 .
\end{aligned} \tag{17}$$

Les accélérations angulaires $\vec{\varepsilon}_{k0}^A$ et les accélérations $\vec{\gamma}_{k0}^A$ des centres de articulations seront données par les dérivées des relations de récurrence (13) et (14)

$$\begin{aligned}
\bar{\varepsilon}_{k0}^A &= a_{k,k-1} \bar{\varepsilon}_{k-1,0}^A + \varepsilon_{k,k-1}^A \bar{u}_3 + \omega_{k,k-1}^A a_{k,k-1} \tilde{\omega}_{k-1,0}^A a_{k,k-1}^T \bar{u}_3 \\
\tilde{\omega}_{k0}^A \tilde{\omega}_{k0}^A + \tilde{\varepsilon}_{k0}^A &= a_{k,k-1} (\tilde{\omega}_{k-1,0}^A \tilde{\omega}_{k-1,0}^A + \tilde{\varepsilon}_{k-1,0}^A) a_{k,k-1}^T + \\
&+ \omega_{k,k-1}^A \omega_{k,k-1}^A \tilde{u}_3 \tilde{u}_3 + \varepsilon_{k,k-1}^A \tilde{u}_3 + 2\omega_{k,k-1}^A a_{k,k-1} \tilde{\omega}_{k-1,0}^A a_{k,k-1}^T \tilde{u}_3 \\
\bar{\gamma}_{k0}^A &= a_{k,k-1} \bar{\gamma}_{k-1,0}^A + a_{k,k-1} (\tilde{\omega}_{k-1,0}^A \tilde{\omega}_{k-1,0}^A + \tilde{\varepsilon}_{k-1,0}^A) \bar{r}_{k,k-1}^A + \\
&+ \gamma_{k,k-1}^A \bar{u}_3 + 2v_{k,k-1}^A a_{k,k-1} \tilde{\omega}_{k-1,0}^A a_{k,k-1}^T \bar{u}_3 \\
\bar{\gamma}_{\sigma,\sigma-1}^A &= \bar{0} \quad (\sigma = 1, 2, 4, 5, 6).
\end{aligned} \tag{18}$$

Les relations (15) et (17) représentent *le modèle cinématique* du manipulateur parallèle Stewart-Gough.

3. ÉQUATIONS DYNAMIQUES DU MOUVEMENT

Dirigées suivant les axes $A_3 z_3^A$, $B_3 z_3^B$, $C_3 z_3^C$, $D_3 z_3^D$, $E_3 z_3^E$, $F_3 z_3^F$, six forces délivrées par six systèmes hydrauliques ou pneumatiques indépendantes $\bar{f}_{32}^A = f_{32}^A \bar{u}_3$, $\bar{f}_{32}^B = f_{32}^B \bar{u}_3$, $\bar{f}_{32}^C = f_{32}^C \bar{u}_3$, $\bar{f}_{32}^D = f_{32}^D \bar{u}_3$, $\bar{f}_{32}^E = f_{32}^E \bar{u}_3$ and $\bar{f}_{32}^F = f_{32}^F \bar{u}_3$, peuvent contrôler le mouvement du manipulateur. La force d'inertie et le moment résultant des forces d'inertie appliquées sur le corps T_k sont calculés en le pôle A_k . D'autre part, l'intervention du poids $m_k^A \bar{g}$ de ce solide et des différentes forces extérieures et intérieures, sera évaluée par les vecteurs \bar{f}_k^* , \bar{m}_k^* du torseur de ces actions.

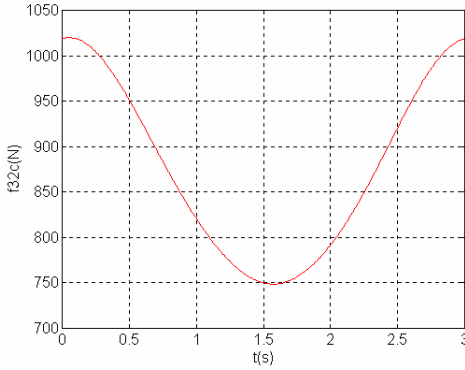


Fig. 5 – Force f_{32}^C de l'actionneur C.

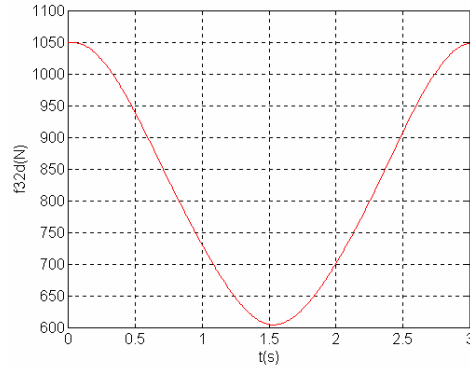


Fig. 6 – Force f_{32}^D de l'actionneur D.

En connaissant la position, la variation de la vitesse et de l'accélération de chaque articulation, dans les conditions d'un mouvement prescrit, ainsi que les

forces et les moments exercés sur chacun des corps du manipulateur il est possible calculer les forces requises aux actionneurs. Pour obtenir ces forces, trois différentes méthodes mènent aux même résultats: une première méthode utilise l'approche classique de Newton-Euler, une seconde applique le formalisme des équations et des multiplicateurs de Lagrange et une troisième est basée sur le principe des travaux virtuels. Certaines relations récursives vectorielles concernant l'équilibre des forces généralisées agissant sur le bras d'un manipulateur sériel ont été obtenues par Kane et Levinson [15].

Dans le cadre d'un problème inverse de dynamique, l'article présent suit la méthode basée sur le principe des travaux virtuels et détermine la variation des forces actives des six actionneurs pendant la durée de fonctionnement du robot. Conformément au principe des travaux virtuels, la condition d'équilibre dynamique du mécanisme est celle que le travail virtuel des forces extérieures et intérieures ainsi que celui des forces d'inertie, développé au cours d'un déplacement virtuel général compatible aux liaisons, serait égal à zéro.

En appliquant le modèle dynamique inverse exprimé par *les équations fondamentales de la dynamique des robots parallèles* obtenues sous une forme matricielle compacte par Ştefan Staicu [28], nous aurons une formule exacte de la force motrice f_{32}^A appliquée par le premier actionneur

$$\begin{aligned}
f_{32}^A = & \vec{u}_3^T [\vec{F}_3^A + \omega_{65a}^{Av} \vec{M}_6^A + \\
& + \omega_{10a}^{Av} \vec{M}_1^A + \omega_{21a}^{Av} \vec{M}_2^A + \omega_{43a}^{Av} \vec{M}_4^A + \omega_{54a}^{Av} \vec{M}_5^A + \\
& + \omega_{10a}^{Bv} \vec{M}_1^B + \omega_{21a}^{Bv} \vec{M}_2^B + \omega_{43a}^{Bv} \vec{M}_4^B + \omega_{54a}^{Bv} \vec{M}_5^B + \\
& + \omega_{10a}^{Cv} \vec{M}_1^C + \omega_{21a}^{Cv} \vec{M}_2^C + \omega_{43a}^{Cv} \vec{M}_4^C + \omega_{54a}^{Cv} \vec{M}_5^C + \\
& + \omega_{10a}^{Dv} \vec{M}_1^D + \omega_{21a}^{Dv} \vec{M}_2^D + \omega_{43a}^{Dv} \vec{M}_4^D + \omega_{54a}^{Dv} \vec{M}_5^D + \\
& + \omega_{10a}^{Ev} \vec{M}_1^E + \omega_{21a}^{Ev} \vec{M}_2^E + \omega_{43a}^{Ev} \vec{M}_4^E + \omega_{54a}^{Ev} \vec{M}_5^E + \\
& + \omega_{10a}^{Fv} \vec{M}_1^F + \omega_{21a}^{Fv} \vec{M}_2^F + \omega_{43a}^{Fv} \vec{M}_4^F + \omega_{54a}^{Fv} \vec{M}_5^F],
\end{aligned} \tag{19}$$

avec les notations

$$\begin{aligned}
\vec{F}_{k0}^A &= m_k^A [\vec{\gamma}_{k0}^A + (\tilde{\omega}_{k0}^A \tilde{\omega}_{k0}^A + \tilde{\varepsilon}_{k0}^A) \vec{r}_k^{CA}] - 9.81 m_k^A a_{k0} \vec{u}_3, \\
\vec{M}_{k0}^A &= m_k^A \tilde{r}_k^{CA} \vec{\gamma}_{k0}^A + \hat{J}_k^A \tilde{\varepsilon}_{k0}^A + \tilde{\omega}_{k0}^A \hat{J}_k^A \tilde{\omega}_{k0}^A - 9.81 m_k^A \tilde{r}_k^{CA} a_{k0} \vec{u}_3, \\
\vec{F}_k^A &= \vec{F}_{k0}^A + a_{k+1,k}^T \vec{F}_{k+1}^A,
\end{aligned} \tag{20}$$

$$\vec{M}_k^A = \vec{M}_{k0}^A + a_{k+1,k}^T \vec{M}_{k+1}^A + \tilde{r}_{k+1,k}^A a_{k+1,k}^T \vec{F}_{k+1}^A \quad (k=1, 2, 3, 4, 5, 6).$$

Les relations (19), (20) représentent justement le *modèle dynamique inverse* du robot parallèle Stewart-Gough. Des expressions semblables s'obtiennent facilement pour les autres forces de commande du manipulateur.

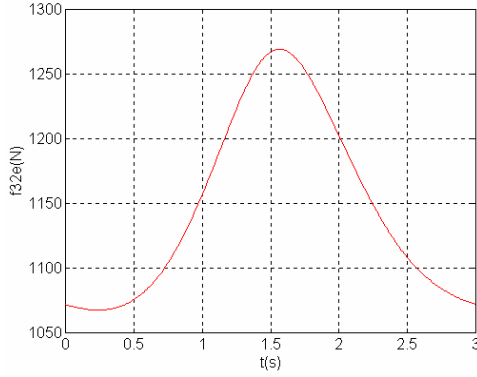


Fig. 7 – Force f_{32}^E de l'actionneur E.

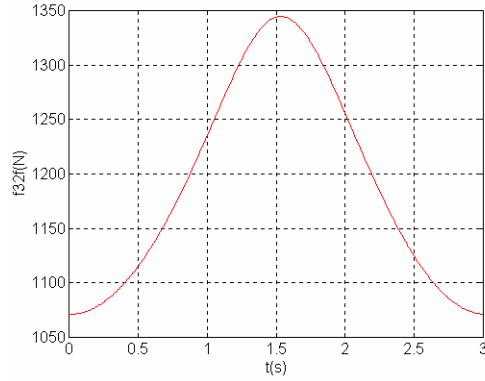


Fig. 8 – Force f_{32}^F de l'actionneur F.

À titre d'application nous allons considérer un manipulateur ayant les caractéristiques suivantes

$$x_0^{G^*} = 0.02 \text{ m}, y_0^{G^*} = 0.04 \text{ m}, z_0^{G^*} = 0.06 \text{ m}$$

$$\alpha_1^* = \frac{\pi}{90}, \alpha_2^* = \frac{\pi}{45}, \alpha_3^* = \frac{\pi}{30}, \Delta t = 3 \text{ s}$$

$$l_0 = OA_1 = 2.80 \text{ m}, l_1 = A_2A_3 = 0.20 \text{ m}$$

$$l_2 = 2.70 \text{ m}, l_3 = 2.80 \text{ m}, l_4 = 2.80 \text{ m}$$

$$m_1 = 2.5 \text{ kg}, m_2 = 20 \text{ kg}, m_3 = 10 \text{ kg}$$

$$m_4 = 2.5 \text{ kg}, m_5 = 5 \text{ kg}, m_6 = 100 \text{ kg}$$

$$\hat{J}_1 = \begin{bmatrix} 0.2 & & \\ & 0.1 & \\ & & 0.1 \end{bmatrix}, \hat{J}_2 = \begin{bmatrix} 5 & & \\ & 30 & \\ & & 30 \end{bmatrix}, \hat{J}_3 = \begin{bmatrix} 20 & & \\ & 20 & \\ & & 5 \end{bmatrix}$$

$$\hat{J}_4 = \hat{J}_1, \hat{J}_5 = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{bmatrix}, \hat{J}_6 = \begin{bmatrix} 300 & & \\ & 300 & \\ & & 600 \end{bmatrix}.$$

Les diagrammes représentés dans un programme écrit en MATLAB donnent la variation des forces motrices f_{32}^A (Fig. 3), f_{32}^B (Fig. 4), f_{32}^C (Fig. 5), f_{32}^D (Fig. 6), f_{32}^E (Fig. 7), f_{32}^F (Fig. 8) des six actionneurs.

4. CONCLUSIONS

1. Dans le cadre de l'analyse cinématique inverse, cet article établit des relations exactes pour la position, la vitesse et l'accélération en temps réel de chacun des éléments du manipulateur Stewart-Gough.

2. La méthode Newton Euler mène à un système de nombreuses équations où les forces de liaison des articulations se retrouveraient parmi les inconnues du problème. D'autre part, l'utilisation des multiplicateurs de Lagrange introduit des inconnues supplémentaires et rend les calculs être assez longs et fastidieux.

3. La nouvelle approche basée sur le principe des travaux virtuels peut facilement éliminer les réactions des contraintes et établit une détermination directe et récursive des forces motrices. Les relations matricielles itératives (19), (20) du modèle théorique de simulation dynamique peuvent rapidement devenir des équations nécessaires au contrôle automatique du mouvement du manipulateur.

Reçu le 26 Juin 2008

BIBLIOGRAPHIE

1. J. ANGELES, *Fundamentals of Robotic Mechanical Systems. Theory, Methods and Algorithms*, Springer Verlag, New York., 1997.
2. L. BARON, J. ANGELES, *The Direct Kinematics of Parallel Manipulators Under Joint-Sensor Redundancy*, IEEE Transactions on Robotics and Automation, **16**, 1, 2000.
3. R. CLAVEL, *Delta: a fast robot with parallel geometry*, Proc. of 18th Int. Symposium on Industrial Robots, Lausanne, 1988.
4. K. CLEARY, T. BROOKS, *Kinematics analysis of a novel 6-DOF parallel manipulator*, Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation, 1993.
5. P. COIFFET, *La robotique. Principes et applications*, Hermès, 1992.
6. J.J. CRAIG, *Introduction to Robotics. Mechanics and Control*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, 1989.
7. B. DASGUPTA, T.S. MRUTHYUNJAYA, *A Newton-Euler formulation for the inverse dynamics of the Stewart platform manipulator*, Mechanism and Machine Theory, **34**, 1998.
8. J. DENAVIT, R. HARTENBERG, *A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices*, ASME Journal of Applied Mechanics, 1955.

9. E. DOMBRE, *Analyse et modélisation des robots manipulateurs*, Hermès, 2001.
10. Z. GENG, L.S. HAYNES, J-D. LEE, R.L. CAROLL, *On the dynamic model and kinematic analysis of a class of Stewart platforms*, Robotics and Autonomous Systems, **9**, 1992.
11. C. GOSSELIN, J. ANGELES, *The optimum kinematics design of spherical three-degree-of-freedom parallel manipulator*, ASME Journal of Mech. Trans. and Automat. in Design, **111**, 2, 1989.
12. J-M. HERVÉ, F. SPARACINO, *Star. A New Concept in Robotics*, Proceedings of the Third Int. Workshop on Advances in Robot Kinematics, Ferrara, 1992.
13. M.L. HUSTY, *An algorithm for solving the direct kinematics of the Stewart-Gough platforms*, Mechanism and Machine Theory, **31**, 4, 1996.
14. C. INNOCENTI, V. PARENTI CASTELLI, *Echelon form solution of direct kinematics for general fully-parallel spherical wrist*, Mechanism and Machine Theory, **28**, 4, 1993.
15. T.R. KANE, D.A. LEVINSON, *Dynamics, Theory and Applications*, Mc Graw-Hill, NY, 1985.
16. J-P. LALLEMAND, S. ZEGHLOUL, *Robotique. Aspects fondamentaux*, Masson, 1998.
17. Y-W. LI, J-S. WANG, L-P. WANG, X-J. LIU, *Inverse dynamics and simulation of a 3-DOF spatial parallel manipulator*, Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics & Automation, Taipei, Taiwan, 2003.
18. J-P. MERLET, *Parallel robots*, Kluwer Academic Publishers, 2000.
19. P.E. NIKRAVESH, *Computer-Aided Analysis of Mechanical Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1988.
20. L. NOTASH, R. PODHORODESKI, *Complete forward displacement solution for a class of three-branch parallel chains*, Int. Journal of Robotic Systems, **11**, 6, 1994.
21. V. PARENTI CASTELLI, R. DI GREGORIO, *A new algorithm based on two extra-sensors for real-time computation of the actual configuration of generalized Stewart-Gough manipulator*, Journal of Mechanical Design, **122**, 2000.
22. A.A. SHABANA, *Computational dynamics*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1994.
23. S. STAIKU, D. ZHANG, R. RUGESCU, *Dynamic modelling of a 3-DOF parallel manipulator using recursive matrix relations*, Robotica, Cambridge University Press, **24**, 1, 2006.
24. S. STAIKU, X-J. LIU, J. WANG, *Inverse dynamics of the HALF parallel manipulator with revolute actuators*, Nonlinear Dynamics, Springer, **50**, 1-2, 2007.
25. S. STAIKU, *Inverse dynamics of a planetary gear train for robotics*, Mechanism and Machine Theory, Elsevier, **43**, 7, 2008.
26. S. STAIKU, D. ZHANG, *A novel dynamic modelling approach for parallel mechanisms analysis*, Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, Elsevier, **24**, 1, 2008.
27. S. STAIKU, D.C. CARP-CIOCÂRDIA, *Dynamic analysis of Clavel's Delta parallel robot*, Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics & Automation, Taipei, Taiwan, 2003.
28. S. STAIKU, *Relations matricielles de récurrence en dynamique des mécanismes*, Rev. Roum. Sci. Techn. – Méc. App., **50**, 1-3, 2005.
29. D. STEWART, *A Platform with Six Degrees of Freedom*, Proc. Inst. Mech. Eng., Part 1, **15**, 1965.
30. A. TREMBLAY, L. BARON, *Geometrical Synthesis of Parallel Manipulators of Star-Like Topology with a Genetic Algorithm*, IEEE Int. Conference on Robotics and Automation, Detroit, Michigan, 1999.
31. L-W. TSAI, *Robot analysis: the mechanics of serial and parallel manipulator*, John Wiley & Sons, Inc., 1999.
32. L-W. TSAI, R. STAMPER, *A parallel manipulator with only translational degrees of freedom*, ASME Design Engineering Technical Conferences, Irvine, CA, 1996.
33. F. WEN, C. LIANG, *Displacement analysis of the 6-6 Stewart platform mechanism*, Mechanism and Machine Theory, **29**, 4, 1994.
34. K. WOHLHART, *Displacement analysis of the general spherical Stewart platform*, Mechanism and Machine Theory, **29**, 4, 1994.
35. C-D. ZHANG, S-M. SONG, *An efficient method for inverse dynamics of manipulators based on the virtual work principle*, Journal of Robotic Systems, **10**, 5, 1993.