ÉTUDE DU MOUVEMENT D'UN CORPS SUR UNE ORBITE HYPERBOLIQUE

GHEORGHE ȚOPAN*

En mémoire de ma chère femme, Lucia

Envisageons l'équation (de la forme) $y = x f(y) - \alpha$ analogue à celle considérée par Lagrange et étudions à l'aide d'elle le mouvement du corps $P(m)$ sur l'orbite hyperbolique par la résolution de l'équation transcendante définissant le mouvement du corps $P(m)$ sur cette trajectoire. Pour avoir la position du corps sur l'orbite, exprimons les coordonnées polaires (r,w) de la masse m par des séries entières convergentes, fonctions directes du temps. De plus, nous déterminons la position du corps sur l'orbite aussi par les coordonnées orbitales (ξ, η) que nous exprimons par des séries, fonctions explicites du temps. Les séries ainsi trouvées – pouvant être programmées – permettent l'accès rapide à la détermination de la position d'une comète sur une trajectoire hyperbolique.

1. En étudiant le mouvement d'un corps sur une orbite elliptique, Lagrange considère (en 1770) l'équation de la forme $y = \alpha + xf(y)$ avec $\alpha \geq 0$ et $f(y)$ fonction connue, analytique en point $y = \alpha$ qu'il résout par la méthode du développement en série. Il trouve la série qui il porte son nom:

$$y = \alpha + \frac{x}{1!}\left[f(y)\right]_\alpha + \frac{x^2}{2\ !}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\ f^2(y)\right]_\alpha + \ldots + \frac{x^n}{n!}\left[\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}y^{n-1}} f^n(y)\right]_\alpha + \ldots. \qquad (1)$$

comme solution unique de cette équation [1]. Plus tard, en 1771, il utilise cette série à la résolution de l'équation de Kepler $E = M + e\sin E$ en exprimant sa solution sous forme de série mais sans préciser son rayon de convergence. Il montre en même tenps la liaison entre la résolution des équations par des séries et l'inversion des séries de puissances. À l'aide de celle-ci il donne encore un procédé d'inversion des séries entières appelé aujourd'hui la méthode de Lagrange. Par ses multiples applications en mathématique et mécanique elle acquiert une importance pratique particulière. Laplace dans sa Mécanique céleste (1799), exprime à l'aide

*Académie Navale „Mircea cel Bătrân" Constanța. Pour correspondance str. Secuilor Martiri 13, ap. 20, 4300 Târgu Mureș, Roumanie.

Rev. Roum. Sci. Techn. – Méc. Appl., Tome 53, N° 1, P. 19–42, Bucarest, 2008

de ce développement, les rayons vecteurs des orbites planetaires en tant que fonctions uniques du temps et il trouve, le premier, son rayon de convergence.

Dans le présent travail nous considérons l'équation de la forme

$$y = xf(y) - \alpha \ (\alpha \geq 0), \tag{2}$$

avec $f(y)$ – fonction connue, analitique en point $y = \alpha$ et nous nous proposons d'en trouver la solution par un procédé analogue à celui donné par Lagrange.

Étudions ensuite, à l'aide de celle-ci, le mouvement du corps *m* sur l'orbite hyperbolique par la résolution de l'équation transcendante définissant le mouvement du corps *P*(*m*) sur cette trajectoire et exprimons les coordonnées polaires (*r*, *w*) de la masse *m* par des séries fonctions directes du temps (Fig. 1).

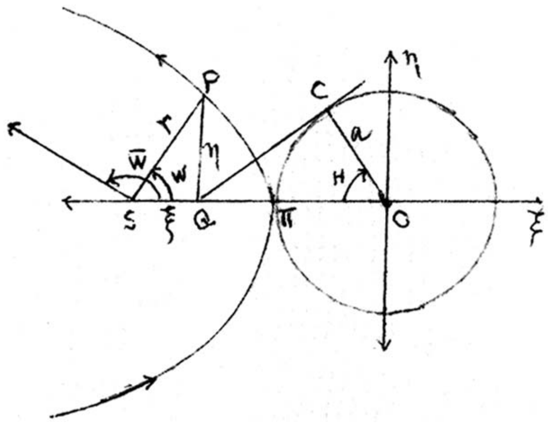

Fig. 1

Les séries ainsi trouvées nous permettent de plus, d'établir la position du corps sur l'orbite hyperbolique par les coordonnées orbitales (ξ, η) exprimées comme fonctions explicites du temps.

Regardée en tant que fonction implicite, l'équation (2) définit *y* comme fonction des deux variables *x* et α, $y = y(x, \alpha)$, analytique en point $(0, \alpha)$ et $y(0, \alpha) = -\alpha$. Considérons dans la suite le cas plus général d'une function quelconque

$$u = \Phi(y) \quad \text{avec} \quad y = x \cdot (x) - \alpha \tag{3}$$

analytique au point $y = -\alpha$. Si dans celle-ci on remplace la fonction $y = y(x, \alpha)$, *u* devient fonction de *x* et α analytique au point $(0, -\alpha)$. Le problème revient à présent de trouver le développement de *u* en série, fonction de α et selon les puissances de *x*. Si dans la série de u à deux variables *x* et α on considère α = c-te., *u* devient function seulement de *x* et la série suivant les puissances de *x*, dont les dérivées sont prises au point $x = 0$, est justement la série de Maclaurin:

$$u = \left(u\right)_o + \frac{x}{1!}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 + \frac{x^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_0 + \ldots + \frac{x^n}{n!}\left(\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right)_0 + \ldots . \tag{4}$$

L'indice o signifie que la fonction et ses dérivées de tout ordre sont prises au point $x = 0$ lorsque $y = -\alpha$ et $\left(u\right)_o = \Phi\left(-\alpha\right)$.

Plus loin, nous nous proposons de trouver les expressions des coefficients du développement (4), en fonction de x et α.

Considerons de nouveau α variable, mais alors u devient function des deux variables x et α, analytique au point $\left(0, -\alpha\right)$. Nous nous servirons de cette fonction à deux variables pour obtenir les expressions des coefficients de la série (4).

Etablissons premièrement quelques relations auxiliaires. Nous différentions (2) par rapport à x et α; on obtient

$$\left(1- \;x\frac{\partial f}{\partial y}\right)\;\frac{\partial y}{\partial x} = \;f\left(y\right),\;\left(1 - x\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial \alpha} = -1,$$

d'où par division

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \;-f\left(y\right)\frac{\partial y}{\partial \alpha}. \tag{5}$$

Dans la suite nous envisageons le cas plus général d'une fonction quelconque $u = \Phi\left(y\right)$ analitique en $y = \alpha$. En procédant comme précédemment on obtient la relation

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \;-f\left(y\right)\frac{\partial u}{\partial \alpha}. \tag{6}$$

Soit maintenant $\varphi\left(y\right)$ une fonction quelconque dérivable par rapport à y; on peut montrer directement, en utilisant les égalités (5) et (6), qu'on a satisfait l'égalité

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\varphi\left(y\right)\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right] = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\varphi\left(y\right)\frac{\partial u}{\partial x}\right]. \tag{7}$$

Nous usons de ces relations pour trouver les termes de la série (4). On part de l'égalité (6) pour calculer le terme général de la série. Dérivons par rapport à x l'égalité (6) et tenons compte de (7):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[-f\left(y\right)\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right] = -\frac{\partial}{\partial \alpha}\left[f\left(y\right)\frac{\partial u}{\partial x}\right] = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left[f^2\left(y\right)\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right].$$

En procédant par induction, on dérive à nouveau cette égalité par rapport à x et on permute l'ordre de dérivation (ce qui est permis):

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\frac{\partial}{\partial x}\left[f^2\left(y\right)\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right] = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}\left[f^2\left(y\right)\frac{\partial u}{\partial x}\right] = -\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}\left[f^3\left(y\right)\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right]$$

si l'on tient compte de (7). On suppose que la règle se maintient jusqu'à $n - 1$, c'est-à dire on a:

$$\frac{\partial^{n-1}u}{\partial x^{n-1}}=(-1)^{n-1}\frac{\partial^{n-2}}{\partial\alpha^{n-2}}\left[f^{n-1}(y)\frac{\partial u}{\partial\alpha}\right] \tag{8}$$

et démontrons qu'elle est vraie aussi pour *n*.

En effet, en dérivant (8) par rapport à *x* tout en tenant compte de (7) et (6), on trouve.

$$\frac{\partial^{n}u}{\partial x^{n}}=(-1)^{n}\frac{\partial^{n-1}}{\partial\alpha^{n-1}}\left[f^{n}(y)\left(\frac{\partial u}{\partial\alpha}\right)\right],\quad n=1,\ 2,\ 3,\ldots, \tag{9}$$

à vraie dire la régle se conserve et nous avons trouvé l'expression du terme général de la série.

Nous revenons maintenant à la function *u* de (3) où on maintient $\alpha=\mathrm{c-te}$. Dans ce cas *u* devient fonction d'une seule variable *x* et son développement est la série (4) où le terme général est pris au point $x=0$ lorsqu'on a $y=-\alpha$. Mais alors $(\mathrm{u})_{\mathrm{o}}=\Phi(-\alpha)=\Phi(-\mathrm{y})_{\alpha}$ et (9) s'écrit:

$$\left(\frac{\partial^{n}u}{\partial x^{n}}\right)_{0}=(-1)^{n}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}\alpha^{n-1}}\left[f^{n}(y)\Phi'(-\alpha)\right]=(-1)^{n}\left\{\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}y^{n-1}}\left[f^{n}(y)\Phi'(-y)\right]\right\}_{\alpha'}, \tag{10}$$

$n=1,\ 2,\ 3\ldots$. Avec ces valeurs des coefficients le développement (4) devient:

$$\Phi(y)=\left[\Phi(-y)\right]_{\alpha}-\frac{x}{1!}\left[f(y)\Phi'(-y)\right]_{\alpha}+\frac{x^{2}}{2!}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left[f^{2}(y)\Phi'(-y)\right]\right\}_{\alpha}-$$

$$+(-1)^{n}\frac{x^{n}}{n!}\left\{\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}y^{n-1}}\left[f^{n}(y)\Phi'(-y)\right]\right\}_{\alpha}+\ldots., \tag{11}$$

où l'indice α signifie que pour tout *n* la function et ses dérivées des accolades sont prises au point $y=\alpha$. La série (11) nous fournit la solution de l'écuation:

$$\Phi(y)=xf(y)-\alpha \tag{12}$$

et elle est remarquable par le fait que ses coefficients s'expriment sous forme de fonctions explicites prises au point $y=\alpha$.

Remarquons qu'en particulier, pour $\Phi(y)=y$ on a $\Phi(-y)=-y$, $\Phi'(-y)=-1$ et on obtient la série

$$y=(-y)_{\alpha}+\frac{x}{1!}\left[f(x)\right]_{\alpha}-\frac{x^{2}}{2!}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left[f^{2}(y)\right]\right\}_{\alpha}+\ldots$$

$$+\ (-1)^{n+1}\frac{x^{n}}{n!}\left\{\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}y^{n-1}}\left[f^{n}(y)\right]\right\}_{\alpha}+\ldots \tag{13}$$

qui donne la solution de l'équation (2).

Un intérêt spécial présente pour nous le cas $\alpha = 0$. L'équation (2) devient alors

$$y = xf(y) \tag{14}$$

et la série (13) qui fournit sa solution se ramène à

$$y = \frac{x}{1!}\left[f(y)\right]_0 - \frac{x^2}{2!}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left[f^2(y)\right]\right\}_0 + \ldots$$

$$+(-1)^{n+1}\left\{\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}y^{n-1}}\left[f^n(y)\right]\right\}_0 + \ldots \tag{15}$$

Dans le cas général de l'équation (12) lorsque $\alpha = 0$ l'équation à résoudre devient

$$\Phi(y) = f(y) \tag{16}$$

et la série qui donne sa solution résulte de (11)

$$\Phi(y) = \left[\Phi(-y)\right]_0 - \frac{x}{1!}\left[f(y)\Phi'(-y)\right]_0 + \frac{x^2}{2!}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left[f^2(y)\Phi'(-y)\right]\right\}_0 - \ldots \tag{17}$$

2. Pour étudier le mouvement de la masse m sur la trajectoire hyperbolique on part de l'intégrale première transcendante contenant explicitement le temps du problème des deux corps:

$$e\mathrm{tg}H + \ln\left[\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{H}{2}\right)\right] - \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}(t - t_o) = k, \tag{18}$$

H étant l'angle fait par le rayon d'un point du cercle principal avec l'axe réel de l'hyperbole et il prend des valeurs entre $(-\pi/2,\ \pi/2)$. La grandeur $a = |a|$ este le rayon du cercle principal et k la constante arbitraire d'intégration (Fig. 1).

L'integrale (18) définit la loi de parcours du corps $P(m)$ sur son trajectoire hyperbolique. Pour avoir les coordonées polaires (r, w) du corps $P(m)$ sur l'orbite hyperbolique – c'est-à-dire la position du corps sur l'orbite – il est nécessaire de déterminer l'angle H fonction du temps. La constante k étant arbitraire, choisissons pour k la valeur $k = 0$ et on obtient l'équation pour H:

$$e\mathrm{tg}H + \ln\left[\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{H}{2}\right)\right] = \nu(t - t_o), \tag{19}$$

où $\nu = \sqrt{\mu}/a^{3/2}$. L'equation (19) associe à une valeur de t une valeur unique pour H. Pour obtenir H fonction de t développons le premier membre de l'équation (19) en série de puissances. On a pour tg H le développement [2]:

$$\operatorname{tg}H = T_1\frac{H}{1!}+T_2\frac{H^3}{3!}+...+T_n\frac{H^{2n-1}}{(2n-1)\ !}+... = \sum_{n=1}^{\infty}T_n\frac{H^{2n-1}}{(2n-1)\ !}, \qquad |H|< \frac{\pi}{2}, \quad (20)$$

où les nombres T_n sont donnés par la relation de récurrence:

$$T_n - C_{2n-1}^2 T_{n-1} + C_{2n-1}^4 T_{n-2} - C_{2n-1}^6 T_{n-3} + \ ... = (-1)^{n-1} \quad (21)$$

où evidemment pour $n=1$ on prend $T_1 = 1$.

Autres valeurs: $T_2 = 2,\ \ T_3 = 16,\ \ T_4 = 272$,...

Les coefficients T_n du développement (20) peuvent être exprimés à l'aide des nombres de Bernoulli B_n. On a alors [2, 3].

$$\operatorname{tg}H = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n}\left(2^{2n}-1\right)}{2n}B_n\frac{H^{2n-1}}{(2n-1)\ !}, \qquad |H|<\frac{\pi}{2}, \quad (22)$$

où

$$B_n = \frac{(2n)\ !}{2^{2n-1}\pi^{2n}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2n}}, \qquad n = 1,\ 2,\ 3,... \quad (23)$$

sont les nombres de Bernoulli. Le développement (20) est identique à (22) mais la relation (21) permet un calcul plus rapide des coefficients T_i.

Pour le second terme de (19) on a le développement en série de puissances exprimé à l'aide des nombres d'Euler E_n [3]:

$$\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{H}{2}\right) = -\left[H + E_1\frac{H^3}{3!}+E_2\frac{H^5}{5!}+...+E_n\frac{H^{2n+1}}{(2n+1)\ !}+...\right], \qquad |H|<\frac{\pi}{2}, \quad (24)$$

où les nombres E_n sont définis par la relation

$$E_n = \frac{2^{2n+2}\cdot(2n)\ !}{\pi^{2n+1}}\left(1-\frac{1}{3^{2n+1}}+\frac{1}{5^{2n+1}}-\frac{1}{7^{2n+1}}+...\right), \qquad n=1,\ 2,\ 3. \quad (25)$$

Voici quelques valeurs initiales: $E_1 = 1,\ \ E_2 = 5,\ \ E_3 = 61,\ \ E_4 = 1385$,... Ayant en vue que les nombres d'Euler E_n et de Bernoulli B_n sont bien étudiés et tabulés, nous préférons exprimer les fonctions trigonométriques utilisées par ces nombres. Les rayons de convergence de ces deux séries (20) et (24) sont les mêmes, $R = \pi/2$. Si maintenant on substitue les développements (20) et (24) dans l'équation (19) on obtient la série:

$$\left(eT_1 - E_o\right)\frac{H}{1!}+\left(eT_2 - E_1\right)\frac{H^3}{3!}+...+\left(eT_n - E_{n-1}\right)\frac{H^{2n-1}}{(2n-1)\ !}+.... = \nu\left(t-t_o\right),$$

ou si l'on note:

$$v = \nu\left(t - t_o\right), \quad \alpha_{2n-1} = \frac{eT_n - E_{n-1}}{\left(2n-1\right)!}, \quad E_o = 1, \quad n = 1,\ 2,\ 3,\ldots, \tag{26}$$

la série ci-dessus devient:

$$v = \alpha_1 H + \alpha_3 H^3 + \alpha_5 H^5 + \ldots + \alpha_{2n-1} H^{2n-1} + \ldots\ . \tag{27}$$

Celle-ci est une série de puissances, sans le terme libre, convergente pour les valeurs de $\left|H\right| < \frac{\pi}{2}$.

Dans la suite, nous nous proposons d'inverser cette série. On suppose $\alpha_1 \neq 0$ et on cherche la série inverse de la série (27) sous la forme:

$$H = \beta_1 v + \beta_3 v^3 + \beta^5 v^5 + \ldots. + \beta_{2n-1} v^{2n-1} + \ldots, \tag{28}$$

où les coefficients β_i vont être déterminés. Pour obtenir ces coefficients il y a plusieurs méthodes. Utilisons premièrement la méthode des coefficients indéterminés. Nous écrivons la série (27) ainsi

$$H = \lambda_1 v - \lambda_3 H^3 - \lambda_5 H^5 - \ldots - \lambda_{2n-1}\quad H^{2n-1} - \ldots., \tag{29}$$

avec les notations:

$$\lambda_1 = \beta_1 = \frac{1}{\alpha_1}, \quad \lambda_{2n-1} = \frac{\alpha_{2n-1}}{\alpha_1}, \quad n = 2,\ 3,\ 4,\ \ldots\ . \tag{30}$$

De (28) calculons $H^3,\ H^5, H^7,\ldots$ et portons les expressions obtenues en (29) après quoi rangeons la série suivant les puissances croissantes de v. Par identification des coefficients de v à la même puissance de ces deux membres, on obtinet le système infini d'équations:

$$\beta_1 = \lambda_1, \quad \beta_3 = -\lambda_3\beta_1^3, \quad \beta_5 = -\beta_1^2\left(3\lambda_3\beta_3 + \lambda_5\beta_1^3\right),$$

$$\beta_7 = -\beta_1\left[3\lambda_3\left(\beta_1\beta_5 + \beta_3^2\right) + 5\lambda_5\quad \beta_1^3\beta_3 + \lambda_7\beta_1^6\right],$$

$$\beta_9 = -\left[\lambda_3\left(3\beta_1^2\beta_7 + 6\beta_1\beta_3\beta_5 + \beta_3^3\right) + 5\lambda_5\beta_1^3\left(\beta_1\beta_5 + \quad 2\beta_3^2\right) + 7\lambda_7\beta_1^6\beta_3 + \lambda_9\beta_1^9\right],$$

....

qui déterminent les coefficients β_i de proche en proche.

On peut eliminer λ_i de ces relations si l'on tient compte de (30) et exprimer les coefficients β_i seulement en fonction de α_i. On a successivement:

$$\beta_1 = \frac{1}{\alpha_1}, \quad \beta_3 = -\frac{\alpha_3}{\alpha_1^4}, \quad \beta_5 = \frac{3\alpha_3^2}{\alpha_1^7} - \frac{\alpha_5}{\alpha_1^6},$$

$$\beta_7 = -\left(\frac{12\alpha_3^3}{\alpha_1^{10}} - \frac{8\alpha_3\alpha_5}{\alpha_1^9} + \frac{\alpha_7}{\alpha_1^8}\right),$$

$$\beta_9 = \frac{55\alpha_3^4}{\alpha_1^{13}} - \frac{55\alpha_3^2\alpha_5}{\alpha_1^{12}} + \frac{10\alpha_3\alpha_7 + 5\alpha_5^2}{\alpha_1^{11}} - \frac{\alpha_9}{\alpha_1^{10}},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \tag{31}$$

Avec les coefficients β_i ainsi déterminés la série (28) devient:

$$H = \beta_1 \nu (t - t_o) + \beta_3 \nu^3 (t - t_o)^3 + \ldots + \beta_{2n-1} \nu^{2n-1} (t - t_o)^{2n-1} + \ldots. \tag{32}$$

3. Une autre méthode pour obtenir la série (32) est celle donée par Lagrange de l'inversion des séries de puissances.

On écrit pour cela la série (27) sous la forme:

$$v = H\left(\alpha_1 + \alpha_3 H^2 + \alpha_5 H^4 + \ldots + \alpha_{2n-1} H^{2n-2} + \ldots.\right) = H \cdot \psi(H), \quad \alpha_1 \neq 0$$

où l'on a noté: $\psi(H) = \alpha_1 + \alpha_3 H^2 + \alpha_5 H^4 + \ldots$. Il suit de là

$$H = \frac{v}{\psi(H)} = v \cdot \chi(H) \quad \text{et} \quad \chi(H) = 1/\psi(H), \tag{33}$$

avec l'observation que les variables *v* et *H* ont renversé les rôles. L'équation (33) a la forme (14) et la série qui fournit sa solution, écrite avec les présentes notations, est donnée par (15):

$$H = \frac{v}{1!}\left[\frac{1}{\psi(H)}\right]_o + \frac{v^3}{3\,!}\left\{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}H^2}\left[\frac{1}{\psi^3(H)}\right]\right\}_0 + \ldots. + \frac{v^{2n-1}}{(2n-1)\,!}\left\{\frac{\mathrm{d}^{2n-2}}{\mathrm{d}H^{2n-2}}\left[\frac{1}{\psi^{2n-1}(H)}\right]\right\}_0 + \ldots =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \beta_{2n-1} v^{2n-1}, \tag{34}$$

avec $\beta_{2n-1} = \frac{1}{(2n-1)\,!}\left\{\frac{\mathrm{d}^{2n-2}}{\mathrm{d}H^{2n-2}}\left[\frac{1}{\psi^{2n-1}(H)}\right]\right\}_0, \quad n = 1,\ 2,\ 3\ldots$.

Étant donné que tg *H* est fonction impaire, le développement (34) contient seulement des puissances impaires de *v*. Nous avons retrouvé ainsi la série (28) l'inverse de la série (27) où les coefficients β_{2n-1} ont les expressions données par

(34). En calculant à l'aide de cette formule on obtient les coefficients β_i sous la forme (31), c'est-à-dire on retrouve la série (32).

L'importance de cette méthode consiste dans le fait qu'elle donne une expression générale pour les coefficients β_i de la série inversée (28) ce qui permet l'étude de la convergence de la série.

En effet, si l'on a en vue que les dérivées de tout ordre de la fonction $1/\psi^{2n-1}(H)$ prises au point $H=0$ sont de grandeurs finies différentes de zéro, il résulte que $\beta_{2n-1} \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Par conséquent, la condition nécessaire de convergence est satisfaite.

En ce qui concerne l'étude de la convergence de la série (28) ou sous la forme (34), le critère du rapport nous donne immédiatement:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\beta_{2n+1}|}{|\beta_{2n-1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n(2n+1)} \frac{\left| \left\{ \dfrac{\mathrm{d}^{2n}}{\mathrm{d}H^{2n}} \left[\dfrac{1}{\psi^{2n+1}\ (H)} \right] \right\}_\mathrm{o} \right|}{\left| \left\{ \dfrac{\mathrm{d}^{2n-2}}{\mathrm{d}H^{2n-2}} \left[\dfrac{1}{\psi^{2n-1}(H)} \right] \right\}_\mathrm{o} \right|} = 0 .$$

Pour déterminer le rayon de convergence on écrit

$$\lim \frac{\left|\beta_{2n+1} v^{2n+1}\right|}{\left|\beta_{2n-1} v^{2n-1}\right|} = \frac{\mu}{a^3} (t - t_\mathrm{o})^2 \lim \frac{|\beta_{2n+1}|}{|\beta_{2n-1}|} < 1 ,$$

d'où

$$t - t_\mathrm{o} < \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \frac{1}{\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty} \left| \dfrac{\beta_{2n+1}}{\beta_{2n-1}} \right|}} = \infty.$$

Par conséquent, la série de puissances (34) converge absolument et uniformément vers la fonction $H(t)$ pour tout intervalle du temps $t - t_\mathrm{o}$ ayant le rayon de convergence $R = \infty$. Il s'ensuit que la somme de la série (34) représente la fonction H pour tout t. Elle est une function dérivable et croit avec le temps.

4. Trouvons maintenant la coordonnée w du corps $P(m)$ dans son mouvement sur l'orbite hyperbolique. Elle est liée à l'angle H par la relation

$$\mathrm{tg}\frac{w}{2} = q\,\mathrm{tg}\frac{H}{2} \quad \text{où} \quad q = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} = \text{ c-te.} \tag{35}$$

On part de la formule

$$\operatorname{tg}\left(\frac{w}{2}-\frac{H}{2}\right)=\frac{\operatorname{tg}\frac{w}{2}-\operatorname{tg}\frac{H}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{w}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{H}{2}}=\frac{(q-1)\operatorname{tg}\frac{H}{2}}{1+q\operatorname{tg}^2\frac{H}{2}},$$

qui, après certaines transformations, se réduit à la forme.

$$\operatorname{tg}\left(\frac{w}{2}-\frac{H}{2}\right)=\frac{\varepsilon\sin H}{1-\varepsilon\cos H},\quad \text{où}\quad \varepsilon=\frac{q-1}{q+1}<1. \tag{36}$$

Nous considérons le premier membre, fonction du paramètre ε (avec H = c-te) et nous dérivons cette égalité par rapoort à ε.

On trouve:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\left(\frac{w}{w}-\frac{H}{2}\right)=\frac{\sin H}{(1-\varepsilon\cos H)}\cos^2\left(\frac{w}{2}-\frac{H}{2}\right) \tag{37}$$

et de (36), selon les calculs, on obtient:

$$\cos^2\left(\frac{w}{2}-\frac{H}{2}\right)=\frac{(1-\varepsilon\cos H)^2}{1-2\varepsilon\cos H+\varepsilon^2}.$$

Avec celle-ci, l'égalité (37) devient:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\left(\frac{w}{2}-\frac{H}{2}\right)=\frac{\sin H}{1-2\varepsilon\cos H+\varepsilon^2}=\zeta(\varepsilon).$$

Développons à présent la fonction $\zeta(\varepsilon)$ en série de MacLaurin. Calculons les dérivées de la fonction $\zeta(\varepsilon)$ que nous prenons au point $\varepsilon=0$. On obtient:

$$\zeta(0)=\sin H,\qquad \zeta'(0)=1!\sin 2H,\qquad \zeta''(0)=2!\sin 3H,\ldots$$

ou en général

$$\zeta^{(n-1)}(0)=(n-1)!\sin nH,\qquad n=1,\ 2,\ 3,\ldots.$$

et la série de puissances est:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\left(\frac{w}{2}-\frac{H}{2}\right)=\zeta(\varepsilon)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\zeta^{(n-1)}(0)}{(n-1)\ !}\varepsilon^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^{n-1}\sin nH. \tag{38}$$

Etant donné que H = c-te et $|\sin nH|\le 1$ pour tout nH, les termes de la série (38) sont plus petits que les termes correspondants de la série géometrique infinie $1+\varepsilon+\varepsilon^2+\varepsilon^3+\ldots+\varepsilon^n+\ldots$ convergente pour $|\varepsilon|<1$. Par conséquent, la série entière

(38), de la fonction $\zeta(\varepsilon)$ est uniformément convergente de sorte qu'elle peut être intégrée terme à terme. À la fin on obtient la série:

$$w = H + 2\left(\varepsilon \sin H + \frac{\varepsilon^2}{2}\sin 2H + \ldots + \frac{\varepsilon^n}{n}\sin nH + \ldots\right), \tag{39}$$

qui à son tour est également convergente pour $|\varepsilon| < 1$.

Plus loin, pour sin *nH* on a le développement en série de puissances:

$$\sin nH = nH - \frac{(nH)^3}{3!} + \frac{(nH)^5}{5!} - \frac{(nH)^7}{7!} + \ldots, \qquad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,$$

convergente pour toutes les valeurs de *nH*. En remplaçant ces développements dans (39) tout en les rangeant suivant les puissances de *nH*, on obtient la série:

$$w = \gamma_1 H - \gamma_3 H^3 + \gamma_5 H^5 - \gamma_7 H^7 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \gamma_{2n-1} H^{2n-1}, \tag{40}$$

où

$$\gamma_1 = \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}, \qquad \gamma_{2n-1} = \frac{2\varepsilon}{(2n-1)\,!}\sum_{k=1}^{\infty} k^{2n-2}\cdot\varepsilon^{k-1}, \qquad n = 2,\ 3,\ 4, \ldots\ .$$

Les coefficients γ_i sont des grandeurs positives $(\gamma_{2n-1} > 0, \quad n = 1,\ 2,\ 3, \ldots)$ donc la série (40) est alternée, les termes vont en décroissant et

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_{2n-1} = 2\varepsilon \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{2n-2}}{(2n-1)\,!}\varepsilon^{k-1} \ \to\ 0\,,$$

le terme général tend d'une manière monotone vers zéro lorsque $n \to \infty$. Par conséquent (40) est une série convergente pour toutes les valeurs de *H*.

Pour avoir «l'anomalie vraie» *w*, fonction directe du temps, nous remplaçons dans la série (40) les expressions de $H, H^3, H^5, \ldots$ obtenues de (32) par élévations successives aux puissances; rangeons ensuite le rèsultat selon les puissances croissantes de $(t - t_o)$. En effectuant tous les calculs on obtient finalement la série:

$$w = \omega_1 (t - t_o) + \omega_3 (t - t_o)^3 + \ldots + \omega_{2n-1}(t - t_o)^{2n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{2n-1}(t - t_o)^{2n-1} \tag{41}$$

avec:

$$\omega_1 = \beta_1\gamma_1\nu, \qquad \omega_3 = \left(\beta_3\gamma_1 - \beta_1^3\gamma_3\right)\nu^3,$$

$$\omega_5 = \left(\beta_5\gamma_1 - 3\beta_1^2\beta_3\gamma_3 + \beta_1^5\beta_5\right)\nu^5,$$

$$\omega_7 = \left[\beta_7\gamma_1 - 3\beta_1\gamma_3 \quad \left(\beta_1\beta_5 + \beta_3^2\right) \; + \; 5\beta_1^4\beta_3\gamma_5 - \beta_1^7\gamma_7\right] \; \nu^7$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots .$$

Vu que la série (40) est convergente pour toutes les valeurs de H et la série (32) s'y substituant est egalement convergente pour toutes les valeurs du temps $t - t_o$, la série qui résulte (41) este aussi convergente pour tout intervalle du temps $t - t_o$ [2]. Ainsi, lorsque t prend des valleurs de $t = t_o$, quand le corps $P(m)$ passe au péricentre, à $t \to \infty$, H varie de 0 à $\pi/2$ et w prend des valeurs de $w = 0$ à la valeur limite $\overline{w}$ (Fig. 1).

5. La seconde coordonnée qui determine la position du corps sur l'orbite hyperbolique est le rayon vecteur r. En function de l'angle H il est représenté par la formule

$$r = a\left(e \sec H - 1\right), \tag{42}$$

où [3]:

$$\sec H = 1 + E_1 \frac{H^2}{2!} + E_2 \frac{N^4}{4!} + E_3 \frac{H^6}{6!} + \ldots + E_n \frac{H^{2n}}{\left(2n\right)\; !} + \ldots, \qquad \left|H\right| < \frac{\pi}{2}. \tag{43}$$

Pour avoir r fonction explicite du temps, substituons en (43), H par sa représentation (32), exprimée directment par t. Calculons tout d'abord de (32), par élévations successives aux puissances, H^2, H^4, H^6,... et remplaçons les expressions obtenues dans (43); rangeons le résultat suivant les puissances croissantes de $t - t_o$. Ob obtient à la fin la série

$$\sec H = 1 + \delta_1\left(t - t_o\right)^2 + \delta_2\left(t - t_o\right)^4 + \ldots + \delta_n \quad \left(t - t_o\right)^{2n} + \ldots \tag{44}$$

où

$$\delta_1 = \beta_1^2\nu^2 \frac{E_1}{2!}, \qquad \delta_2 = \left(2\beta_1\beta_3 \frac{E_1}{2!} + \beta_1^4 \frac{E_2}{4!}\right)\nu^4,$$

$$\delta_3 = \left[\left(2\beta_1\beta_5 + \beta_3^2\right)\frac{E_1}{2!} + 4\beta_1^3\beta_3 \frac{E_2}{4!} + \beta_1^6 \frac{E_3}{6!}\right]\nu^6 \tag{45}$$

$$\delta_4 = \left[2\left(\beta_1\beta_7 + \beta_3\beta_5\right)\frac{E_1}{2!} + 2\beta_1^2\left(2\beta_1\beta_5 + 3\beta_3^2\right)\frac{E_2}{4!} + 6\beta_1^5\beta_3 \frac{E_3}{6!} + \beta_1^8 \frac{E_4}{8!}\right]\nu^8,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots .$$

On peut encore exprimer les coefficients δ_i en function seulement de α_i si l'on tient compte de (31):

$$\delta_1=\frac{\nu^2}{\alpha_1^2}\frac{E_1}{2!},\qquad \delta_2=-\left(\frac{2\alpha_3}{\alpha_1^5}\frac{E_1}{2!}-\frac{1}{\alpha_1^4}\frac{E_2}{4!}\right)\nu^4,$$

$$\delta_3=\left[\left(\frac{7\alpha_3^2}{\alpha_1^8}-\frac{2\alpha_5}{\alpha_1^7}\right)\frac{E_1}{2!}-\frac{4\alpha_3}{\alpha_1^7}\cdot\frac{E_2}{4!}+\frac{1}{\alpha_1^6}\frac{E_3}{6!}\right]\nu^6, \tag{45'}$$

$$\delta_4=-\left[\left(\frac{30\ \alpha_3^3}{\alpha_1^{11}}-\frac{18\alpha_3\alpha_5}{\alpha_1^{10}}+\frac{2\alpha_7}{\alpha_1^9}\right)\frac{E_1}{2!}-\left(\frac{12\alpha_3^2}{\alpha_1^{10}}-\frac{4\alpha_5}{\alpha_1^9}\right)\frac{E_2}{4!}+\frac{6\alpha_3}{\alpha_1^9}\frac{E_3}{6!}-\frac{1}{\alpha_1^8}\frac{E_4}{8!}\right]\nu^8,$$

....

En substituant maintenant la série (44) dans la formule (42), nous obtenons le rayon vecteur r en série function explicite du temps:

$$r=a(e-1)+ae\left[\delta_1(t-t_o)^2+\delta_2(t-t_o)^4+\ldots+\delta_n(t-t_o)^{2n}+\ldots.\right]=$$

$$=a(e-1)+ae\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n(t-t_o)^{2n}. \tag{46}$$

6. La série généralisée (17) qui fournit la solution de l'équation (16) permet d'exprimer sec H directement comme function du temps. Soit donc $\Phi(H)=\sec H$, alors $\Phi(-H)=\Phi(H)$ et en procédant comme au n°3 on prend $x=v,\ \ f(y)=1/\psi(H)$, l'équation à résoudre devient:

$$\sec H=\frac{v}{\psi(H)}=v\cdot\chi(H)\ \text{ avec }\ \chi(H)=1/\psi(H),$$

où $\psi(H)=\alpha_1+\alpha_3H^2+\alpha_5H^4+\ldots$ C'est une équation de la forme (16) et sa solution, écrite avec les notations actuelles, est exprimée par la série (17):

$$\sec H=(\sec H)_{\mathrm{o}}+\frac{v^2}{2!}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}H}\left[\frac{\sec H}{\psi^2(H)}\mathrm{tg}H\right]\right\}_{\mathrm{o}}+\frac{v^4}{4!}\left\{\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}H^3}\left[\frac{\sec H}{\psi^4(H)}\mathrm{tg}H\right]\right\}_{\mathrm{o}}+\ldots$$

$$+\frac{v^{2n}}{(2n)!}\left\{\frac{\mathrm{d}^{2n-1}}{\mathrm{d}H^{2n-1}}\left[\frac{\sec H}{\psi^{2n}(H)}\mathrm{tg}H\right]\right\}_{\mathrm{o}}+\ldots.\ .$$

Parce que sec$H$ este une function paire dans le développement (17) restent seulement les termes aux puissances paires. Compte tenu que $v=\nu(t-t_{\mathrm{o}})$ la série ci-dessus peut s'écrire:

$$\sec H=1+\delta_1(t-t_o)^2+\delta_2(t-t_o)^4+\ldots+\delta_n(t-t_o)^{2n}+\ldots=1+\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n(t-t_{\mathrm{o}})^{2n},$$

avec
$$\delta_n = \frac{\nu^{2n}}{(2n)!}\left\{\frac{\mathrm{d}^{2n-1}}{\mathrm{d}H^{2n-1}}\left[\frac{\sec H}{\psi^{2n}(H)}\,\mathrm{tg}H\right]\right\}_{\mathrm{o}} . \tag{47}$$

En calculant par la formule (47) on obtient les coefficients δ_i sous la forme (45). Nous avons retrouvé ainsi la serie (44) où les coefficients δ_n ont l'expression générale (47).

L'importance de cette méthode consiste dans le fait qu'elle fournit le terme general δ_n de la série ce qui permet l'étude de sa convergence. En effet, observons premierement que dans le terme général δ_n les dérivées de tout ordre de l'accolade, prises au point $H = 0$, sont des grandeurs finies différentes de zero. Il s'ensuit que le terme général δ_n de la série tend d'une maniére monotone vers zéro lorsque $n \to \infty$.

Quant à la convergence de la série, la régle de d'Alembert nous donne:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|\delta_{n+1}|}{|\delta_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{\nu^2}{(2n+1)(2n+2)}\cdot\frac{\left|\left\{\frac{\mathrm{d}^{2n+1}}{\mathrm{d}H^{2n+1}}\left[\frac{\sec H}{\psi^{2n+2}(H)}\,\mathrm{tg}H\right]\right\}_o\right|}{\left|\left\{\frac{\mathrm{d}^{2n-1}}{\mathrm{d}H^{2n-1}}\left[\frac{\sec H}{\psi^{2n}(H)}\,\mathrm{tg}H\right]\right\}_o\right|} = 0 .$$

Celle-ci signifie que la limite du rapport ne dépend pas de t et le rayon de convergence s'obtient en écrivant

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\delta_{n+1}\ (t-t_{\mathrm{o}})^{2n+2}\right|}{\left|\delta_n\ (t-t_{\mathrm{o}})^{2n}\right|} = (t-t_{\mathrm{o}})^2\lim_{n\to\infty}\frac{|\delta_{n+1}|}{|\delta_n|} < 1 ,$$

d'où

$$t - t_{\mathrm{o}} < \frac{1}{\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|\delta_{n+1}|}{|\delta_n|}}} = \infty .$$

Par conséquent la série de puissances (47) converge absolument et uniformément vers la fonction sec *H* pour tout intervalle du temps $t - t_o$, ayant le rayon de convergence $R = \infty$. Il suit que la série (46) exprimant le rayon vecteur *r* est convergente pour tout *t*.

La position du corps *P*(*m*) sur l'orbite hyperbolique est à présent detérminée par les coordonnées polaires (*r*, *w*) exprimées par les séries convergentes (46) et (41) fonctions explicites du temps.

7. Arrêtons-nous un instant pour examiner le mode de mouvement du corps $P(m)$ sur l'orbite hyperbolique. Observons directement sur la Fig. 1 qu'à l'instant $t = t_o$ le corps passe au péricentre II et de la série (32) il résulte que $H = 0$. Au même instant de la série (41) on a $w = 0$. Lorsque t croît, $t \to \infty$, le corps P s'éloigne sur l'orbite et $H \to \pi/2$ mais w tend vers une valeur limite $\overline{w}$ – finie. Cette limite s'obtient immédiatement de (39):

$$\lim_{H \to \pi/2} w(H) = \overline{w} = \frac{\pi}{2} + 2\left(\varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{3} + \frac{\varepsilon^5}{5} - \frac{\varepsilon^7}{7} + \ldots\right),$$

où la série entre parenthèses converge pour $\varepsilon < 1$. Le rayon vecteur r, au même instant $t = t_{\text{o}}$, a la valeur minimum et $r_{\min} = a(e-1)$ comme il résulte de (46). À mesure que t croît et H tend vers $\pi/2$, la somme de la série (47) croît aussi, c'est-à-dire $\sec H \to \infty$, ainsi que le rayon vecteur $r \to \infty$. Il en résulte que le point situé sur l'orbite hyperbolique ayant les coordonnées polaires $(r = \infty, \overline{w})$ este un point asymtotique.

En ce qui concerne la vitesse angulaire du rayon vecteur r de la masse m sur l'orbite, elle varie avec le temps. En effet, en dérivant (41) par rapport au temps on trouve la loi de variation

$$\dot{w} = \omega_1 + 3\omega_3 (t - t_o)^2 + 5\omega_5 (t - t_o)^4 + \ldots . \tag{48}$$

Puisque la série (41) est convergente pour tout intervalle du temps ($t - t_{\text{o}}$) la série dérivée (48) se comporte de même ayant le même intervalle de convergence. Par conséquent, la somme de la série (48) est justement la fonction $\dot{w}(t)$ pour tout t. À l'instant $t = t_{\text{o}}$ quand le corps $P(m)$ passe au péricentre, on a: $\dot{w} = \omega_1 = \beta_1\gamma_1\nu$.

La vitesse linéaire de la masse m est donnée par la formule connue

$$v^2 = \mu\left(\frac{2}{r} + \frac{1}{a}\right),$$

où r, comme fonction directe du temps, a le développement (46). Il s'ensuit de là qu' à l'instant $t = t_{\text{o}}$, lorsque le corps passe au péricentre $r = r_{\min} = a(e-1)$ et la vitesse linéaire a la valeur maximum.

$$V_{\max}^2 = \frac{\mu}{a}\frac{e+1}{e-1}.$$

Evidemment, lorsque le corps $P(m)$ s'éloigne à l'infini, l'angle $H \to \pi/2$ et $\sec H \to \infty$ le rayon vecteur r tend egalement à l'infini et la vitesse linéaire devient minimum $V_{\min}^2 = \mu/a$.

On peut ecore déterminer la position du corps $P(m)$ sur l'orbite hyperbolique par les coordonnées cortésiennes (ξ,η): $\xi = SQ = r\cos w$, $\eta = PQ = r\sin w$. De la Fig. 1 on peut déduire aisément: $r\cos w = a(e - \sec H)$ et $r^2\sin^2 w = r^2(1-\cos^2 w)$; suivant les calculs on obtient:

$$\xi = r\cos w = a(e-\sec H),\ \eta = r\sin w = a\sqrt{e^2-1}\cdot \mathrm{tg}H\ , \tag{49}$$

c'est-à-dire une représentation paramétrique de l'hyperpole avec H – paramètre. Pour sec$H$ on a le développement en série (47), fonction directe du temps. La fonction tg$H$ est exprimée par la série (20) identique à (22) où les coefficients T_i sont donnés par la relation de récurrence (21) et B_i par les nombres de Bernoulli (23). L'angle H est représenté comme fonction du temps par la série (32). Si de celle ci on calcule successivement: $H^3, H^5, H^7,...$ et on remplace les développements obtenus dans (20), on trouve – en rangeant suivant les puissances de $t-t_o$ – pour tg$H$ une série fonction explicite du temps:

$$tgH = \sigma_1(t-t_o)+\sigma_2(t-t_o)^3+\sigma_3(t-t_o)^5+\sigma_4(t-t_o)^7+..., \tag{50}$$

où

$$\sigma_1 = \beta_1 T_1\,\nu,\ \sigma_2 = \left(\beta_3\frac{T_1}{1!}+\beta_1^3\frac{T_2}{3!}\right)\nu^3,$$

$$\sigma_3 = \left(\beta_5\frac{T_1}{1!}+3\beta_1^2\beta_3\frac{T_2}{3!}+\beta_1^5\frac{T_3}{5!}\right)\nu^5,$$

$$\sigma_4 = \left[\beta_7\frac{T_1}{1!}+3\beta_1\left(\beta_1\beta_5+\beta_3^2\right)\frac{T_2}{3!}+5\beta_1^4\beta_3\frac{T_3}{5!}+\beta_1^7\frac{T_4}{7!}\right]\nu^7,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots .$$

La série (50) reste convergente pour $|H| < \pi/2$ c'est-à-dire pour tout intervalle du temps $(t-t_o)$ [2]. Avec les développements (47) et (50) on obtient la position du corps $P(m)$ sur l'orbite hyperbolique par les coordonnées cartésiennes (ξ,η) exprimées par des séries convergentes fonctions uniques du temps:

$$\left.\begin{aligned}\xi &= ae - a\left[1+\delta_1(t-t_o)^2+\delta_2(t-t_o)^4+...+\delta_n(t-t_o)^{2n}+...\right],\\ \eta &= a\sqrt{e^2-1}\left[\sigma_1(t-t_o)+\sigma_2(t-t_o)^3+...+\sigma_n(t-t_2)^{2n-1}+...\right].\end{aligned}\right\}. \tag{51}$$

8. On peut aborder l'étude du mouvement du corps $P(m)$ sur l'orbite hyperbolique en procédant d'une autre mainère. On transforme l'équation (19) par l'introduction d'une paramètre F. Notons dans ce but

$$\ln\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{H}{2}\right)\right]=-F$$

et en effectuant certains transformations, on trouve:

$$\operatorname{tg}H=\operatorname{sh}F,\quad \sec H=\operatorname{ch}F,\quad \operatorname{tg}\frac{H}{2}=\operatorname{th}\frac{F}{2}. \tag{52}$$

Ces égalités nous permettent d'apporter les équations du mouvement (19), (35), (42) à la forme:

$$\left.\begin{array}{l} e\operatorname{sh}F-F=\nu(t-t_o) \\ \operatorname{tg}\dfrac{w}{2}=q\operatorname{th}\dfrac{F}{2},\quad q=\sqrt{\dfrac{e+1}{e-1}}=\text{c-te} \\ r=a(e\operatorname{ch}F-1), \end{array}\right\} \tag{53}$$

elles étant analoques à celles du nouvement elliptique.

La première équation (53) définit la loi de parcours du corps $P(m)$ sur l'orbite hyperbolique. Elle associe à une valeur de t une valeur bien détrminée de F et par le moyen de celle de la troisiéme équation, la valeur correspondante du rayon vecteur r. La première équation (53) a la forme (2) et pour avoir F fonction du temps nous développons le premier membre en série de puissances. D'aprés les calculs on trouve

$$v=a_1F+a_3F^3+a_5F^5+\ldots+a_{2n-1}F^{2n-1}+\ldots, \tag{54}$$

où l'on a noté:

$$v=\nu(t-t_o),\quad a_1=\frac{e-1}{1!},\quad a_{2n-1}=\frac{e}{(2n-1)\ !},\quad n=2,\ 3,\ 4,\ldots$$

La série (54) est sans le terme libre, convergente pour toutes les valeurs de F. Nous nous proposons d'inverser cette série. Cherchons la série inverse de la série (54) sous la forme:

$$F=b_1v+b_3v^3+b_5v^5+\ldots+b_{2n-1}v^{2n-1}+\ldots, \tag{55}$$

où les coefficients b_i vont être déterminés. Pour cela il existe plusieures méthodes. La première que nous utilisons c'est la méthode des coefficients indéterminés. À cet effet, on écrit la série (54) ainsi:

$$F = c_1 v - c_3 F^3 - c_5 F^5 - \ldots - c_{2n-1} F^{2n-1} - \ldots \,, \tag{56}$$

avec les notations:

$$c_1 = \frac{1}{a_1}, \quad c_{2n-1} = \frac{a_{2n-1}}{a_1}, \quad n = 2,\ 3,\ 4\ldots\ . \tag{57}$$

Calculons maintenant de (55) F^3, F^5, F^7 ,...; introduisons ensuite F et les expressions ainsi obtenues dans (56) et rangeons la série suivant les puissances de v. En identifiant les coefficients de v à la même puissance de ces deux membres on obtient le système infini d'équations:

$$b_1 = c_1, \quad b_3 = -b_1^3 c_3, \quad b_5 = -b_1^2\left(3b_3c_3 + b_1^3 c_5\right),$$

$$b_7 = -b_1\left[3c_3\left(b_1b_5 + b_3^2\right) + 5b_1^3 b_3 c_5 + b_1^6 c_7\right],$$

$$b_9 = -\left[c_3\left(3b_1^2 b_7 + 6b_1b_3b_5 + b_3^3\right) + 5b_1^3 c_5\left(b_1b_5 + 2b_3^2\right) + 7b_1^6 b_3 c_7 + b_1^9 c_9\right],$$

....

qui déterminent successivement les coefficients b_i de proche en proche. On peut encore exprimer ces coefficients en fonction de a_i si l'on tient compte de (57). On a:

$$b_1 = \frac{1}{a_1}, \quad b_3 = -\frac{a_3}{a_1^4}, \quad b_5 = \frac{3a_3^2}{a_1^7} - \frac{a_5}{a_1^6},$$

$$b_7 = -\left(\frac{12a_3^3}{a_1^{10}} - \frac{8a_3a_5}{a_1^9} + \frac{a_7}{a_1^8}\right), \tag{58}$$

$$b_9 = \frac{55a_3^4}{a_1^{13}} - \frac{55a_3^2 a_5}{a_1^{12}} + \frac{10a_3a_7 + 5a_5^2}{a_1^{11}} - \frac{a_9}{a_1^{10}},$$

....

Une fois les coefficients b_i déterminés on peut écrire la série (55) fonction directe du temps:

$$F = b_1 \nu\left(t - t_o\right) + b_3 \nu^3 \left(t - t_o\right)^3 + \ldots + b_{2n-1} \nu^{2n-1}\left(t - t_o\right)^{2n-1} + \ldots\ . \tag{59}$$

9. Les coefficients b_i peuvent encore être déterminés en utilisant la méthode de Lagrange de l'inversion des séries de puissances. Ecrivons dans ce but la série (54) ainsi:

$$v = F\left(a_1 + a_3F^2 + a_5F^4 + \ldots + a_{2n-1}F^{2n-2} + \ldots\right) = F \cdot \psi\left(F\right), \quad a_1 \neq 0\,,$$

où l'on a noté: $\psi(F) = a_1 + a_3F^2 + a_5F^4 + ...$. D'où l'on a:

$$F = \frac{v}{\psi(F)} = v \cdot \chi(F), \text{ avec } \chi(F) = 1/\psi(F). \tag{60}$$

Or, l'équation ci-dessus a la forme (14) et sa solution est donnée par la série (15). Cette dernière série écrite par les présentes notations: $y = F, \quad x = v, \quad f(y) = \chi(F)$, devient

$$F = \frac{v}{1!}\left[\frac{1}{\psi(F)}\right]_{\mathrm{o}} + \frac{v^3}{3!}\left\{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}F^2}\left[\frac{1}{\psi^3(F)}\right]\right\}_{\mathrm{o}} + \frac{v^5}{5!}\left\{\frac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}F^4}\left[\frac{1}{\psi^5(F)}\right]\right\}_{\mathrm{o}} + ... +$$

$$+\frac{v^{2n-1}}{(2n-1)!}\left\{\frac{\mathrm{d}^{2n-2}}{\mathrm{d}F^{2n-2}}\left[\frac{1}{\psi^{2n-1}(F)}\right]\right\}_{\mathrm{o}} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1}v^{2n-1}, \tag{61}$$

avec

$$b_{2n-1} = \frac{1}{(2n-1)!}\left\{\frac{\mathrm{d}^{2n-2}}{\mathrm{d}F^{2n-2}}\left[\frac{1}{\psi^{2n-1}(F)}\right]\right\}_{\mathrm{o}}, \qquad n = 1,\ 2,\ 3... \ . \tag{62}$$

Ici on doit observer que la fonction sh F étant impaire, les coefficients d'indice pair du développement (15), pris au point $F = 0$ sont tous nuls, c'est-à-dire $b_{2n} = 0, \quad n = 1,\ 2...$ telle que la série (15) se ramène à la série (61). Son importance consiste dans le fait qu'elle nous furnit le terme général (62). En calculant par cette formule, on obtient les coefficients b_i sous la forme (58) ce qui confirme pleinement les résultats obtenus, par la méthode précédente. Quant à la covergence de la série imversée (61), ayant en vue que dans le terme général (62) les dérivées de tout ordre de la fonction $1/\psi^{2n-1}(F)$, prises au point $F = 0$, sont finies et différentes de zéro il en résulte que $b_{2n-1} \to 0$ lorsqu $n \to \infty$. Le critère de d'Alembert nous conduit alors à considérer.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{2n+1}}{b_{2n-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n(2n+1)}\frac{\left|\frac{\mathrm{d}^{2n}}{\mathrm{d}F^{2n}}\left[\frac{1}{\psi^{2n+1}(F)}\right]\right\}_o\right|}{\left|\frac{\mathrm{d}^{2n-2}}{\mathrm{d}F^{2n-2}}\left[\frac{1}{\psi^{2n-1}}\right]\right\}_o\right|} = 0 .$$

Cela signifie que la limite du rapport ne dépend pas de t et le rayon de convergence s'obtient en écrivant

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|b_{2n+1}\quad v^{2n+1}\right|}{b_{2n-1}\quad v^{2n-1}}=\nu^2\left(t-t_o\right)^2\lim_{n\to\infty}\frac{\left|b_{2n+1}\right|}{\left|b_{2n-1}\right|}<1$$

d'où

$$t-t_o<\frac{1}{\nu\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left|b_{2n+1}\right|}{\left|b_{2n-1}\right|}}}=\infty\,.$$

Par conséquent, la série de puissances (61) ou sous la forme (59) converge absolument et uniformément vers la fonction $F(t)$ pour tout intervalle du temps $t-t_o$ ayant le rayon de convergence $R=\infty$. Il s'ensuit que la somme de la série (61) représente la fonction F pour tout t.

10. Pour avoir le rayon vecteur r du corps $P(m)$ exprimé en fonction du temps on procède comme il suit. On considère le développement de ch$F$ en série de puissances

$$\mathrm{ch}F=1+\frac{F^2}{2!}+\frac{F^4}{4!}+\frac{F^6}{6!}+\ldots+\frac{F^{2n}}{\left(2n\right)\;!}+\ldots$$

convergente pour toutes les valeurs de F. Si l'on substitue dans celle-ci les expressions de F^2, F^4, F^6, ... tirées de (59) par élévations successives aux puissances, on obtient, rangeant la série selon les puissances de $t-t_o$, ch$F$ fonction explicite du temps:

$$\mathrm{ch}F=1+\delta_1^{'}\left(t-t_o\right)^2+\delta_2^{'}\left(t-t_o\right)^4+\ldots+\delta_n^{'}\left(t-t_o\right)^{2n}+\ldots\;. \tag{63}$$

Les coefficients $\delta_i^{'}$ exprimés en fonction de a_i à l'aide des égalités (58) sont:

$$\delta_1^{'}=\frac{\nu^2}{a_1^2}\cdot\frac{1}{2!},\qquad \delta_2^{'}=-\left(\frac{2a_3}{a_1^5}\frac{1}{2!}-\frac{1}{a_1^4}\cdot\frac{1}{4!}\right)\nu^4,$$

$$\delta_3^{'}=\left[\left(\frac{7a_3^2}{a_1^8}-\frac{2a_5}{a_1^7}\right)\frac{1}{2!}-\frac{4a_3}{a_1^7}\cdot\frac{1}{4!}+\frac{1}{a_1^6}\cdot\frac{1}{6!}\right]\nu^6,$$

$$\delta_4^{'}=-\left[\left(\frac{30a_3^3}{a_1^{11}}-\frac{18a_3a_5}{a_1^{10}}+\frac{2a_7}{a_1^9}\right)\frac{1}{2!}-\left(\frac{12a_3^2}{a_1^{10}}-\frac{4a_5}{a_1^9}\right)\frac{1}{4!}+\frac{6a_3}{a_1^9}\cdot\frac{1}{6!}-\frac{1}{a_1^8}\cdot\frac{1}{8!}\right]\nu^8,$$

....

Pour le rayon vecteur r donné par (53) on aura le développement suivant

$$r = a(e-1) + ae\left[\delta_1^{'}(t-t_o)^2 + \delta_2^{'}(t-t_o)^4 + \ldots + \delta_n^{'}(t-t_o)^{2n} \quad + \ldots\right] =$$

$$= a(e-1) + ae\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^{'}(t-t_o)^{2n}, \tag{65}$$

fonction directe du temps.

La série de Lagrange généralisée (17) nous offre la possibilité d'exprimer ch F par une série fonction seulement de $\mathrm{t}-\mathrm{t}_{\mathrm{o}}$ et en même temps de donner une expression générale au terme $\delta_n^{'}$. En effet, si l'on prend dans (16): $\Phi(y) = \mathrm{ch}F$, $\Phi(-y) = \mathrm{ch}(-F) = \mathrm{ch}F$ et $\Phi^{'}(-y) = \mathrm{sh}F$, $x = v$, $f(y) = \chi(F)$, l'équation (16) devient:

$$\mathrm{ch}F = \frac{v}{\psi(F)} = v \cdot \chi(F) = 1/\psi(F),$$

où $\psi(F)$ este donéé au n°9. La solution de cette équation, écrite à l'aide des notations actuelles, est exprimée par la série (17):

$$\mathrm{ch}F = [\mathrm{ch}F]_o + \frac{v^2}{2!}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}F}\left[\frac{\mathrm{sh}F}{\psi^2(F)}\right]\right\}_{\mathrm{o}} + \frac{v^4}{4!}\left\{\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}F^3}\left[\frac{\mathrm{sh}F}{\psi^4(F)}\right]\right\}_{\mathrm{o}} + \ldots.$$

$$\ldots + \frac{v^{2n}}{(2n)\ !}\left\{\frac{\mathrm{d}^{2n-1}}{\mathrm{d}F^{2n-1}}\left[\frac{\mathrm{sh}F}{\psi^{2n}(F)}\right]\right\}_{\mathrm{o}} + \ldots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\delta_n^{'}(t-t_{\mathrm{o}})^{2n}, \tag{66}$$

où

$$\delta_n^{'} = \frac{\nu^{2n}}{(2n)!}\left\{\frac{\mathrm{d}^{2n-1}}{\mathrm{d}F^{2n-1}}\left[\frac{\mathrm{sh}F}{\psi^{2n}(F)}\right]\right\}_{\mathrm{o}}, \qquad n = 1,\ 2,\ 3\ldots. \tag{67}$$

La fonction ch F étant paire son développement en série contiendra seulement des puissances paires de v telle que la série (17) se ramène à la série (66) ayant le terme général (67). Calculés par la formule (67) les coefficients $\delta_n^{'}$ se ramènent aux expressions (64). Donc, les séries (63) et (66) sont identiques.

Ayant le terme général $\delta_n^{'}$ on peut montrer que la série (66) este convergente. En effet, compte tenu que pour tout n la fonction et ses dérivées de tout ordre de l'accolade, prises au point $F = 0$, ont des valeurs finies différentes de zéro, le terme général $\delta_n^{'} \to 0$ lorsque $n \to \infty$. En procédant comme au n°6, le critère du rapport montre que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\delta_{n+1}^{'}\right|}{\delta_n^{'}} = 0,$$

c'est-à-dire la limite du rappart ne depend pas de t et le rayon de convergence $R = \infty$. Cela signifie que la série de puissances (66) converge absolument et uniformément vers la fonction ch$F$ pour tout intervalle du temps $t - t_o$. En d'autres termes, pour toute valeur de t, la fonction ch$F$ représente la somme de la série (66). Nous avons montré, aussi par cette voie, que la série (65) qui représente le rayon vecteur r du corps $P(m)$, est convergente pour toute valeur du temps t.

La seconde coordonnée, l'angle w qui joue le rôle «d'anomalie vraie» se détermine comme au n°4. En effet, puisque de (52) on a $\operatorname{th}\frac{F}{2} = \operatorname{tg}\frac{H}{2}$, en remplaçant cette formule dans la seconde égalité (53) on obtient la relation (35) après quoi on suit la voie exposée au n°4. On retrouve pour w le développement (41).

11. La position du corps $P(m)$ sur l'orbite hyperbolique peut être encore détérminée par les coordonées orbitales ξ, η exprimées à l'aide du paramètre F. Si l'on tient compte des relations (52), la représentation parametrique (49) de l'hyperbole, devient:

$$\xi = r\cos w = a\left(e - \operatorname{ch}F\right),\quad \eta = r\sin w = a\sqrt{e^2 - 1}\operatorname{sh}F, \tag{68}$$

où ch F est donné par le développement (63), convergent pour toutes les valeurs du temps.

Il nous est resté d'éxprimer la fonction sh$F$ par une série dépendant directment du temps. On a le développement:

$$\operatorname{sh}F = F + \frac{F^3}{3!} + \frac{F^5}{5!} + \ldots + \frac{F^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots \tag{69}$$

convergente pour toutes les valeurs de F. Calculons maintenant de la série (59), successivement $F^3, F^5,\ F^7$,...et portant les expressions obtenue, dans la série ci-dessus, selon rangement, on toruve :

$$\operatorname{sh}F = \sigma_1'\left(t - t_o\right) + \sigma_2'\left(t - t_o\right)^3 + \sigma_3'\left(t - t_o\right)^5 + \sigma_4'\left(t - t_o\right)^7 + \ldots, \tag{70}$$

où les coefficients σ_n' sont donnés par les relations :

$$\sigma_1' = b_1\nu,\quad \sigma_2' = \left(b_3\frac{1}{1!} + b_1^3\frac{1}{3!}\right)\nu^3,$$

$$\sigma_3' = \left(b_5\frac{1}{1!} + 3b_1^2 b_3\cdot\frac{1}{3!} + b_1^5\frac{1}{5!}\right)\nu^5,$$

$$\sigma_4' = \left[b_7 \frac{1}{1!} + 3b_1 \left(b_1 b_5 + b_3^2 \right) \frac{1}{3!} + 5b_1^4 b_3 \frac{1}{5!} + b_1^7 \frac{1}{7!} \right] \nu^7 ,$$

....

En ce qui concerne la convergence de la série (70), ayant en vue que la série (69) est convergente pour toutes les valeurs de F et la série (59) s'y substituant est aussi convergente pour tout intervalle du temps $t - t_o$, la série résultant (70) est, elle aussi, convergente pour tout t [2]. D'ailleurs on peut montrer la convergence de la série (70) en procédant comme au numéro précédent en exprimant sh F par la série de Lagrange (17) puis en étudiant la série obtenue à l'aide du critère de d'Alembert.

Ceci étant dit, on peut maintenant détérminer la position du corps P (m) par les coordonnées orbitales (68) exprimées par les séries convergentes:

$$\xi = ae - a\left[1 + \delta_1' \left(t - t_o \right)^2 + \delta_2' \left(t - t_o \right)^4 + ... + \delta_n' \left(t - t_o \right)^{2n} + ... \right]$$

$$\eta = a\sqrt{e^2 - 1} \ \left[\sigma_1' \left(t - t_o \right) + \sigma_2' \left(t - t_o \right)^3 + ... + \sigma_n' \left(t - t_o \right)^{2n-1} + ... \right].$$

Nous espérons que la mise en pratique des résultats obtenus dans le présent travail imposera le travail à l'attention des chercheurs.

BIBLIOGRAPHIE

1. H. WIELEITNER, *Istoria matematicii de la Descartes până la mijlocul secolului al XIX-lea*, Edit. Ştiinţifică, Bucureşti, 1964.
2. G.M. FIHTENHOLT, *Curs de calcul diferenţial şi integral*, Vol. 2, Edit. Tehnică, Bucureşti, 1964.
3. N. MIHĂILESCU *et al.*, *Memorator matematic şi tehnic*, Edit. Tehnică, Bucureşti, 1955.