MÉTHODES NOUVELLES DANS LE PROBLÈME DES TROIS CORPS. UNE NOUVELLE CONFIGURATION INTÉGRABLE

Gheorghe T. ȚOPAN

À ma mère Juliana

Une nouvelle manière d'aborder le problème des trois corps nous permet d'étudier deux mouvements particuliers. Le premier, lorsque les trois corps conservent pendant le mouvement la configuration de colinéarité, peut être étudié aussi par d'autres méthodes. Le deuxième concerne le cas lorsque les trois corps forment au cours du mouvement la configuration du triangle rectangle. Montrons que dans ces configurations les équations du mouvement peuvent être intégrées et les corps $P_1(m_1)$ et $P_2(m_2)$ décrivent autour du corps central $P_0(m_0)$ des trajectoires sections coniques ou des spirales d'Archimède.

1. Soient :

$$\dot{q}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{1}$$

les équations canoniques du mouvement des masses m_1 et m_2 autour du corps central m_0. Dans le travail [1] nous avons montré que l'expression de l'hamiltonien H a la forme :

$$\begin{aligned} H = T - U = \frac{1}{2\bar{\mu}_1}\left(p_1^2 + \frac{p_2^2}{q_1^2}\right) + \frac{1}{2\bar{\mu}_2}\left(p_3^2 + \frac{p_4^2}{q_3^2}\right) + \\ + \frac{1}{m_0}\left[\left(p_1 p_3 + \frac{p_2 p_4}{q_1 q_3}\right)\cos(q_4 - q_2) + \left(\frac{p_2 p_3}{q_1} - \frac{p_1 p_4}{q_3}\right)\sin(q_4 - q_2)\right] - U, \end{aligned} \tag{2}$$

avec

$$U = \kappa\left(\frac{m_0 m_1}{q_1} + \frac{m_0 m_2}{q_3} + \frac{m_1 m_2}{q_{12}}\right) \tag{3}$$

et

Académie Navale „Mircea cel Bătrân", Constanța. Pour correspondance: Str. Secuilor Martiri 13, ap.20, 540116 Târgu-Mureș, Roumanie.

Rev. Roum. Sci. Techn. – Méc. Appl., Tome 53, Nº 3, P. 263–287 , Bucarest, 2008

$$\begin{gathered} r_1 = q_1, \quad \theta_1 = q_2, \quad r_2 = q_3, \quad \theta_2 = q_4, \\ r_{12}^2 = q_{12}^2 = q_1^2 + q_3^2 - 2q_1q_3\cos(q_4 - q_2), \\ \bar{\mu}_i = \frac{m_0 m_i}{m_0 + m_i}, \quad i = 1, 2. \end{gathered} \tag{4}$$

Le système (1), sous sa forme générale, admet sept intégrales premières parmi lesquelles nous retenons les intégrales des aires écrites vectoriellement pour le cas des trois corps :

$$m_1(m - m_1)(\vec{r}_1 \times \dot{\vec{r}}_1) + m_2(m - m_2)(\vec{r}_2 \times \dot{\vec{r}}_2) - m_1m_2\left[(\vec{r}_1 \times \dot{\vec{r}}_2) + (\vec{r}_2 \times \dot{\vec{r}}_1)\right] = \vec{C}, \tag{5}$$

où $m = m_0 + m_1 + m_2$, nécessaires dans ce qui suit.

L'énergie cinétique $2T$ de (2) écrite ordonnée est une forme quadratique

$$\begin{aligned} F = 2T = {} & a_{11}p_1^2 + a_{22}p_2^2 + a_{33}p_3^2 + a_{44}p_4^2 + 2a_{13}p_1p_3 + \\ & + 2a_{14}p_1p_4 + 2a_{23}p_2p_3 + 2a_{24}p_2p_4 . \end{aligned} \tag{6}$$

Par identification avec une forme quadratique à quatre variables, on trouve pour les coefficients a_{ij} les valeurs :

$$\begin{array}{llll} a_{11} = \dfrac{1}{\bar{\mu}_1}, & a_{12} = 0, & a_{13} = \dfrac{\cos\gamma}{m_0}, & a_{14} = -\dfrac{\sin\gamma}{m_0q_3}, \\ a_{21} = 0, & a_{22} = \dfrac{1}{\bar{\mu}_1 q_1^2}, & a_{23} = \dfrac{\sin\gamma}{m_0q_1}, & a_{24} = \dfrac{\cos\gamma}{m_0q_1q_3}, \\ a_{31} = \dfrac{\cos\gamma}{m_0}, & a_{32} = \dfrac{\sin\gamma}{m_0q_1}, & a_{33} = \dfrac{1}{\bar{\mu}_2}, & a_{34} = 0, \\ a_{41} = -\dfrac{\sin\gamma}{m_0q_3}, & a_{42} = \dfrac{\cos\gamma}{m_0q_1q_3}, & a_{43} = 0, & a_{44} = \dfrac{1}{\bar{\mu}_2 q_3^2}, \end{array} \tag{7}$$

où $\gamma = q_4 - q_2$. Il est à remarquer que l'énergie cinétique est une forme quadratique symétrique aux coefficients $a_{ij} = a_{ji}$ ayant les valeurs données plus haut.

Considérons maintenant les formes linéaires L_i :

$$L_i = \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial p_i} = a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + a_{i3}p_3 + a_{i4}p_4, \quad i = 1,\ 2,\ 3,\ 4 .$$

La matrice de ces formes linéaires, que nous notons par A, est la matrice de la forme quadratique F

$$\mathbf{A}=\left(a_{ij}\right)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}, \quad \left(a_{ij}=a_{ji}\right) \tag{8}$$

et le déterminant associé à la matrice **A**, soit $|\mathbf{A}|$ ce déterminant, est le discriminant de la forme quadratique F.

Avec les valeurs données en (7), le discriminant $|\mathbf{A}|$ est :

$$|\mathbf{A}|=\begin{vmatrix} \dfrac{1}{\overline{u}_1} & 0 & \dfrac{\cos\gamma}{m_0} & -\dfrac{\sin\gamma}{m_0 q_3} \\ 0 & \dfrac{1}{\overline{\mu}_1 q_1^2} & \dfrac{\sin\gamma}{m_o q_1} & \dfrac{\cos\gamma}{m_0 q_1 q_3} \\ \dfrac{\cos\gamma}{m_0} & \dfrac{\sin\gamma}{m_0 q_1} & \dfrac{1}{\overline{\mu}_2} & 0 \\ -\dfrac{\sin\gamma}{m_0 q_3} & \dfrac{\cos\gamma}{m_0 q_1 q_3} & 0 & \dfrac{1}{\overline{\mu}_2 q_3^2} \end{vmatrix}=\frac{m}{m_0 m_1 m_2}\neq 0, \tag{9}$$

où $m=m_0+m_1+m_2$. De (9) on voit que la valeur du discriminant ne dépend pas de l'angle $\gamma=q_4-q_2$ et elle est différente de zéro. Par conséquent, la forme quadratique (6) est non dégénérée.

2. Cela étant dit, revenons au système (1). La résolution de ce système se ramène à la résolution d'une équation aux dérivées partielles, l'équation d'Hamilton-Jacobi, qui dans notre cas est l'équation réduite :

$$H\left(q,\frac{\partial W}{\partial q}\right)=h \qquad \left(h=\text{c-te}\right). \tag{10}$$

Un procédé de résolution de cette équation est celui de séparer les variables lorsqu'on peut trouver pour l'équation (10) une solution de la forme

$$W=\sum_{i=1}^{4}W_i(q_i), \tag{11}$$

où $W_i(q_i)$ este une fonction seulement de la variable q_i.

En deux travaux successifs [2, 3] P. Stäckel a montré que cela est possible dans le cas où en (10), en plus des variables q_i, l'équation contient seulement les carrés de $\frac{\partial W}{\partial q_i}$. Alors on peut trouver pour l'équation (10) non seulement une solution de la forme (11), mais on peut faire une étude complète du mouvement.

Pour notre problème cela signifie de ramener, par un procédé quelconque, la forme quadratique (6) à la forme canonique :

$$\Phi = 2T = s_1 p_1^2 + s_2 p_2^2 + s_3 p_3^2 + s_4 p_4^2 , \tag{12}$$

où s_i sont des fonctions ou des constantes réelles. Pour réaliser cela nous écrivons les deux formes quadratiques F et Φ sous la forme matricielle :

$$F = \mathbf{P}'\mathbf{A}\mathbf{P} \quad \text{et} \quad \Phi = \overline{\mathbf{P}}'\mathbf{S}\overline{\mathbf{P}}$$

où **A** est la matrice (8) et

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} s_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_4 \end{pmatrix} = \left(\mathbf{E} s_i\right)$$

est la matrice de la forme quadratique (12). On a noté par **E** la matrice unité d'ordre quatre, par **P** et $\overline{\mathbf{P}}$ les matrices vecteur-colonne :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix}, \quad \overline{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} p_1' \\ p_2' \\ p_3' \\ p_4' \end{pmatrix}$$

et par $\mathbf{P}'$ et $\overline{\mathbf{P}}'$ leurs transposées.

Transformons maintenant le vecteur **P** à l'aide de la matrice **A**, on obtient ainsi le vecteur $\mathbf{Z} = \mathbf{A}\mathbf{P}$. Si le vecteur **Z** est parallèle au vecteur **P**, ce qu'on suppose, c'est-à-dire on a $\mathbf{Z} = s\mathbf{P}$ où s est un nombre, le vecteur **P** s'appelle le vecteur propre de la matrice **A** (ou le vecteur propre de la transformation linéaire $\mathbf{Z} = \mathbf{A}\mathbf{P}$) et le nombre s est la valeur propre correspondante.

Par la suite, nous nous proposons de déterminer le vecteur propre de la matrice **A** ou de la transformation linéaire donnée. En écrivant que le vecteur **Z** est parallèle au vecteur **P**, c'est-à-dire

$$\mathbf{A}\mathbf{P} = s\mathbf{E}\mathbf{P} ,$$

on obtient

$$\left(\mathbf{A} - s\mathbf{E}\right)\mathbf{P} = 0 . \tag{13}$$

Cette dernière égalité montre que le vecteur **P** est déterminé à une constante près. Écrite explicitement, l'égalité (13) devient :

$$\left.\begin{array}{llllllll}(a_{11}-s)p_1 & + & a_{12}p_2 & + & a_{13}p_3 & + & a_{14}p_4 & =0,\\ a_{21}p_1 & + & (a_{22}-s)p_2 & + & a_{23}p_3 & + & a_{24}p_4 & =0,\\ a_{31}p_1 & + & a_{32}p_2 & + & (a_{33}-s)p_3 & + & a_{34}p_4 & =0,\\ a_{41}p_1 & + & a_{42}p_2 & + & a_{43}p_3 & + & (a_{44}-s)p_4 & =0.\end{array}\right\} \tag{14}$$

Nous avons obtenu un système d'équations linéaires homogènes pour déterminer les coordonnées p_i du vecteur **P**. Mais, pour que le système (14) possède une solution non nulle, il faut et il suffit que le déterminant du système soit nul

$$\begin{vmatrix} a_{11}-s & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22}-s & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-s & a_{34}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}-s \end{vmatrix} = 0 . \tag{15}$$

C'est une équation de quatrième degré en s appelée l'équation séculaire. Elle permet de calculer les valeurs propres s_i qui sont toutes réelles. A chaque valeur propre s_i correspond un vecteur propre $\boldsymbol{\upsilon}_i$ dont les composantes sont déterminées à l'aide des coordonnées du système (14) pour la valeur correspondante de s_i.

Revenons à l'équation (15). Développée, celle-ci conduit à une équation de quatrième degré en s :

$$s^4 - c_1 s^3 + c_2 s^2 - c_3 s + c_4 = 0 , \tag{16}$$

où, pour la forme quadratique (6), les coefficients c_i ont les expressions :

$$\begin{aligned} c_1 &= a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44},\\ c_2 &= (a_{11}+a_{22})(a_{33}+a_{44}) + a_{11}a_{22} + a_{33}a_{44} - a_{13}^2 - a_{14}^2 - a_{23}^2 - a_{24}^2,\\ c_3 &= a_{11}a_{22}(a_{33}+a_{44}) + a_{33}a_{44}(a_{11}+a_{22}) - a_{13}^2(a_{22}+a_{44}) -\\ &\quad - a_{14}^2(a_{22}+a_{33}) - a_{23}^2(a_{11}+a_{44}) - a_{24}^2(a_{11}+a_{33}),\\ c_4 &= (a_{13}a_{24} - a_{14}a_{23})^2 - a_{13}^2 a_{22}a_{44} - a_{14}^2 a_{22}a_{33} - a_{23}^2 a_{11}a_{44} -\\ &\quad + a_{24}^2 a_{11}a_{33} + a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}. \end{aligned} \tag{17}$$

Dans le présent travail nous étudions deux mouvements particuliers pour lesquels le rapport des rayons vecteurs r_1 et r_2 des corps $P_1(m_1)$ et $P_2(m_2)$ au corps central $P_0(m_0)$ reste constant au cours du mouvement $\left(\dfrac{r_2}{r_1} = \nu = \text{c-te}\right)$. Dans la première configuration nous considérons le cas lorsque les trois corps arrivent dans la position de colinéarité et conservent pendant le mouvement cette configuration. Dans le deuxième cas, les trois corps conservent dans leur mouvement la configuration de triangle rectangle ayant l'angle droit dans le pôle $P_0(m_0)$.

3. La configuration de colinéarité a été étudiée pour la première fois par L. Euler en 1765 et le résultat obtenu a constitué le premier succès de la loi de la gravitation et l'affirmation de la mécanique newtonienne. On peut considérer, en particulier, que les deux corps $P_1(m_1)$ et $P_2(m_2)$ sont situés du même coté par rapport au corps central $P_0(m_0)$ et rangés dans l'ordre $P_0P_2P_1$. Dans ce cas $\theta_2 - \theta_1 = q_4 - q_2 = \gamma = 0$ et de (7) il résulte : $a_{14} = a_{41} = 0$, $a_{23} = a_{32} = 0$. L'énergie cinétique (6) se ramène à

$$F = 2T = a_{11}p_1^2 + a_{22}p_2^2 + a_{33}p_3^2 + a_{44}p_4^2 + 2a_{13}p_1p_3 + 2a_{24}p_2p_4 \tag{18}$$

et est également une forme quadratique non dégénérée. L'équation séculaire (15) devient

$$\begin{vmatrix} a_{11}-s & 0 & a_{13} & 0 \\ 0 & a_{22}-s & 0 & a_{24} \\ a_{31} & 0 & a_{33}-s & 0 \\ 0 & a_{42} & 0 & a_{44}-s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}-s & a_{13} \\ a_{31} & a_{33}-s \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{22}-s & a_{24} \\ a_{42} & a_{44}-s \end{vmatrix} = 0. \tag{19}$$

Elle se décompose en deux équations séculaires. La première

$$\begin{vmatrix} a_{11}-s & a_{13} \\ a_{31} & a_{33}-s \end{vmatrix} = s^2 - (a_{11}+a_{33})s + a_{11}a_{33} - a_{13}^2 = 0 \tag{20}$$

avec les solutions :

$$s_1 = \frac{1}{2}\left(\tau_1 + \sqrt{\Delta_1}\right) = \text{c-te}, \quad s_3 = \frac{1}{2}\left(\tau_1 - \sqrt{\Delta_1}\right) = \text{c-te} \tag{20'}$$

et la seconde,

$$\begin{vmatrix} a_{22}-s & a_{24} \\ a_{42} & a_{44}-s \end{vmatrix} = s^2 - (a_{22}+a_{44})s + a_{22}a_{44} - a_{24}^2 = 0 \tag{21}$$

ayant les solutions :

$$s_2 = \frac{1}{2}\left(\tau_2 + \sqrt{\Delta_2}\right)\frac{1}{q_1^2}, \quad s_4 = \frac{1}{2}\left(\tau_2 - \sqrt{\Delta_2}\right)\frac{\nu^2}{q_3^2}, \tag{21'}$$

où l'on a noté :

$$\tau_1 = \frac{1}{\bar{\mu}_1} + \frac{1}{\bar{\mu}_2}, \quad \tau_2 = \frac{1}{\bar{\mu}_1} + \frac{1}{\nu^2 \bar{\mu}_2}, \quad \tau_3 = \frac{1}{\bar{\mu}_1 \bar{\mu}_2} - \frac{1}{m_0^2},$$
$$\Delta_1 = \tau_1^2 - 4\tau_3, \quad \Delta_2 = \tau_2^2 - \frac{4\tau_3}{\nu^2}. \tag{22}$$

Les racines s_i ainsi trouvées sont les valeurs propres de l'équation séculaire (19). Une fois s_i trouvées, la forme quadratique (18) se ramène à la forme canonique (12) et on a

$$\Phi = 2T = s_1 p_1^2 + s_2' \frac{p_2^2}{q_1^2} + s_3 p_3^2 + s_4' \frac{p_4^2}{q_3^2}, \tag{23}$$

avec les notations :

$$s_2' = \frac{1}{2}\left(\tau_2 + \sqrt{\Delta_2}\right), \quad s_4' = \frac{1}{2}\left(\tau_2 - \sqrt{\Delta_2}\right)\nu^2. \tag{24}$$

4. On peut encore ramener la forme quadratique (18) à la forme canonique par une transformation linéaire orthogonale. Les valeurs propres s_i de l'équation séculaire permettent de trouver une telle transformation. En effet, aux quatre valeurs propres s_i de l'équation séculaire (19) correspondent quatre vecteurs propres $\boldsymbol{\upsilon}_i$. Le fait que l'équation séculaire (19) se décompose en deux équations séculaires montre que pour le cas colinéaire on peut considérer le problème des trois corps comme deux problèmes distincts des deux corps. Ainsi, pour le premier problème, nous considérons l'équation séculaire (20) ayant les valeurs propres s_1 et s_3 données par (20)'. Le système qui fournit les coordonnées p_1 et p_3 des vecteurs propres $\boldsymbol{\upsilon}_1$ et $\boldsymbol{\upsilon}_3$ s'obtient de (14) ou de (20) et pour la valeur propre $s = s_1$ est

$$\left.\begin{array}{ccccc} (a_{11} - s_1) p_1 & + & a_{13} p_3 & = & 0, \\ a_{31} p_1 & + & (a_{33} - s_1) p_3 & = & 0. \end{array}\right\}$$

Par la résolution de ce système, on trouve :

$$p_1 = k, \quad p_3 = -\frac{a_{11} - s_1}{a_{13}} k = -\frac{a_{13}}{a_{33} - s_1} k,$$

où k est un nombre arbitraire et le vecteur propre $\boldsymbol{\upsilon}_1$ correspondant à la valeur s_1 est

$$\boldsymbol{\upsilon}_1 = k\left(\mathbf{e}_1 - \frac{a_{11} - s_1}{a_{13}} \mathbf{e}_3\right).$$

En résolvant le même système (ci-dessus) pour la valeur propre $s = s_3$, on obtient le vecteur propre

$$\boldsymbol{\upsilon}_3 = k\left(\mathbf{e}_1 - \frac{a_{11} - s_3}{a_{13}}\mathbf{e}_3\right).$$

On peut montrer tout de suite que les deux vecteurs sont orthogonaux, c'est-à-dire $(\boldsymbol{\upsilon}_1, \boldsymbol{\upsilon}_3) = 0$ si on tient compte qu'on a $(a_{11} - s_1)(a_{11} - s_3)/a_{13}^2 = -1$.

En procédant de la même manière avec la deuxième équation séculaire (21) ayant les valeurs propres s_2 et s_4 données par (21)', on trouve les vecteurs propres :

$$\boldsymbol{\upsilon}_2 = k\left(\mathbf{e}_2 - \frac{a_{22} - s_2}{a_{24}}\mathbf{e}_4\right), \quad \boldsymbol{\upsilon}_4 = k\left(\mathbf{e}_2 - \frac{a_{22} - s_4}{a_{24}}\mathbf{e}_4\right),$$

où k est nombre arbitraire. Ces vecteurs sont également orthogonaux, c'est-à-dire $(\boldsymbol{\upsilon}_2 \cdot \boldsymbol{\upsilon}_4) = 0$, compte tenu de l'égalité : $(a_{22} - s_2)(a_{22} - s_4)/a_{24}^2 = -1$. Du reste, nous montrerons par la suite que l'ensemble des vecteurs $\boldsymbol{\upsilon}_1, \boldsymbol{\upsilon}_2, \boldsymbol{\upsilon}_3, \boldsymbol{\upsilon}_4$ forment un système orthogonal. En normant ces vecteurs, on trouve la transformation linéaire :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\boldsymbol{\upsilon}_1}{\|\boldsymbol{\upsilon}_1\|} = \mathbf{e}'_1 &= \beta_{11}\mathbf{e}_1 + \beta_{12}\mathbf{e}_2 + \beta_{13}\mathbf{e}_3 + \beta_{14}\mathbf{e}_4 \\ \mathbf{e}'_2 &= \beta_{21}\mathbf{e}_1 + \beta_{22}\mathbf{e}_2 + \beta_{23}\mathbf{e}_3 + \beta_{24}\mathbf{e}_4 \\ \mathbf{e}'_3 &= \beta_{31}\mathbf{e}_1 + \beta_{32}\mathbf{e}_2 + \beta_{33}\mathbf{e}_3 + \beta_{34}\mathbf{e}_4 \\ \mathbf{e}'_4 &= \beta_{41}\mathbf{e}_1 + \beta_{42}\mathbf{e}_2 + \beta_{43}\mathbf{e}_3 + \beta_{44}\mathbf{e}_4 \end{aligned}\right\}, \tag{25}$$

où

$$\|\boldsymbol{\upsilon}_1\| = \sqrt{(\boldsymbol{\upsilon}_1 \cdot \boldsymbol{\upsilon}_1)} = k\sqrt{1 + \left(\frac{a_{11} - s_1}{a_{13}}\right)^2},$$

sont les longueurs des vecteurs $\boldsymbol{\upsilon}_i$ et pour $k = 1$ les coefficients β_{ij} ont les expressions :

$$\begin{array}{llll} \beta_{11} = \dfrac{1}{\|\boldsymbol{\upsilon}_1\|}, & \beta_{12} = 0, & \beta_{13} = -\dfrac{1}{\|\boldsymbol{\upsilon}_1\|} \cdot \dfrac{a_{11} - s_1}{a_{13}}, & \beta_{14} = 0, \\ \beta_{21} = 0, & \beta_{22} = \dfrac{1}{\|\boldsymbol{\upsilon}_2\|}, & \beta_{23} = 0 & \beta_{24} = \dfrac{1}{\|\boldsymbol{\upsilon}_2\|}\dfrac{a_{22} - s_2}{a_{24}}, \\ \beta_{31} = \dfrac{1}{\|\boldsymbol{\upsilon}_3\|}, & \beta_{32} = 0, & \beta_{33} = -\dfrac{1}{\|\boldsymbol{\upsilon}_3\|}\dfrac{a_{11} - s_3}{a_{13}}, & \beta_{34} = 0, \\ \beta_{41} = 0, & \beta_{42} = \dfrac{1}{\|\boldsymbol{\upsilon}_4\|}, & \beta_{43} = 0, & \beta_{44} = -\dfrac{1}{\|\boldsymbol{\upsilon}_4\|}\dfrac{a_{22} - s_4}{a_{24}}. \end{array} \tag{26}$$

Soit

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}\beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & \beta_{14}\\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} & \beta_{24}\\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} & \beta_{34}\\ \beta_{41} & \beta_{42} & \beta_{43} & \beta_{44}\end{pmatrix} \tag{27}$$

la matrice de la transformation (25). Si l'on note par **B**' sa transposée, la condition d'orthogonalité de la transformation (25) est

$$\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}'=\mathbf{E},$$

où **E** est la matrice unité d'ordre quatre. Explicitée, l'égalité ci-dessus peut s'écrire

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{4}\beta_{ij}^2=\beta_{1j}^2+\beta_{1j}^2+\beta_{3j}^2+\beta_{4j}^2=1, \qquad (j=1,2,3,4)\\ \sum_{i=1}^{4}\beta_{ij}\beta_{ik}=\beta_{1j}\beta_{1k}+\beta_{2j}\beta_{2k}+\beta_{3j}\beta_{3k}+\beta_{4j}\beta_{4k}=0, \quad (j,k=1,2,3,4;\ j\neq k).\end{gathered} \tag{28}$$

Avec les valeurs des coefficients β_{ij} données par (26), les conditions d'orthogonalité (28) sont vérifiées. Par conséquent, les vecteurs $\mathbf{v}_i$ forment un système orthogonal et la transformation linéaire (25) est orthonormée comme sa matrice (27). Elle fait le passage de la base $(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_4)$ à la base $(\mathbf{e}_1',\mathbf{e}_2',\mathbf{e}_3',\mathbf{e}_4')$. La transformation linéaire $(p_i)\to(p_i')$ de matrice **B** est :

$$\begin{aligned} p_1&=\frac{1}{\|\mathbf{v}_1\|}p_1'-\frac{1}{\|\mathbf{v}_1\|}\frac{a_{11}-s_1}{a_{13}}p_3', \qquad & p_2&=\frac{1}{\|\mathbf{v}_2\|}p_2'-\frac{1}{\|\mathbf{v}_2\|}\frac{a_{22}-s_2}{a_{24}}p_4',\\ p_3&=\frac{1}{\|\mathbf{v}_3\|}p_1'-\frac{1}{\|\mathbf{v}_3\|}\frac{a_{11}-s_3}{a_{13}}p_3', \qquad & p_4&=\frac{1}{\|\mathbf{v}_4\|}p_2'-\frac{1}{\|\mathbf{v}_4\|}\frac{a_{22}-s_4}{a_{24}}p_4'.\end{aligned} \tag{29}$$

C'est la transformation linéaire orthonormée cherchée.

5. Nous allons montrer ci-dessous que cette la transformation linéaire orthonormée (29) réduit la forme quadratique (18) à la forme canonique (23). En effet, en écrivant la forme quadratique (18) et la transformation linéaire orthonormée (29) sous la forme matricielle et en effectuant dans la forme quadratique la transformation orthogonale, nous sommes conduits, en suivant la voie du nr. 2, à l'équation séculaire (19) qui fournit les coefficients s_i seulement en fonction des coefficients de la forme quadratique donnée. On obtient ainsi la forme canonique (23).

Nous considérons important de montrer, directement par substitution, que la transformation (29) ramène la forme quadratique (18) à la forme canonique. En effet, en remplaçant la transformation (29) dans la forme quadratique (18), après les calculs on obtient :

$$\Phi = 2T = A_1 p_1'^2 + A_2 p_2'^2 + A_3 p_3'^2 + A_4 p_4'^2 + A_{13} p_1' p_3' + A_{24} p_2' p_4',$$

où les coefficients $A_i\left(i=1,2,3,4\right)$ et A_{13}, A_{24} ont les expressions :

$$A_1 = \frac{a_{11}}{\|\mathbf{v}_1\|^2} + \frac{a_{33}}{\|\mathbf{v}_3\|^2} + \frac{2a_{13}}{\|\mathbf{v}_1\|\cdot\|\mathbf{v}_3\|},$$

$$A_2 = \frac{a_{22}}{\|\mathbf{v}_2\|^2} + \frac{a_{44}}{\|\mathbf{v}_4\|^2} + \frac{2a_{24}}{\|\mathbf{v}_2\|\cdot\|\mathbf{v}_4\|},$$

$$A_3 = \frac{a_{11}}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\left(\frac{a_{11}-s_1}{a_{13}}\right)^2 + \frac{a_{33}}{\|\mathbf{v}_3\|^2}\left(\frac{a_{11}-s_3}{a_{13}}\right)^2 - \frac{2a_{13}}{\|\mathbf{v}_1\|\cdot\|\mathbf{v}_3\|},$$

$$A_4 = \frac{a_{22}}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\left(\frac{a_{22}-s_2}{a_{24}}\right)^2 + \frac{a_{44}}{\|\mathbf{v}_4\|^2}\left(\frac{a_{22}-s_4}{a_{24}}\right)^2 - \frac{2a_{24}}{\|\mathbf{v}_2\|\cdot\|\mathbf{v}_4\|},$$

$$A_{13} = -2\left[\frac{a_{11}}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\frac{a_{11}-s_1}{a_{13}} + \frac{a_{33}}{\|\mathbf{v}_3\|^2}\frac{a_{11}-s_3}{a_{13}} + \frac{a_{11}-a_{33}}{\|\mathbf{v}_1\|\cdot\|\mathbf{v}_3\|}\right],$$

$$A_{24} = -2\left[\frac{a_{22}}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\frac{a_{22}-s_2}{a_{24}} + \frac{a_{44}}{\|\mathbf{v}_4\|^2}\frac{a_{22}-s_4}{a_{24}} + \frac{a_{22}-a_{44}}{\|\mathbf{v}_2\|\cdot\|\mathbf{v}_4\|}\right].$$

Dans les deux dernières égalités on a tenu compte qu'on a $s_1 + s_3 = a_{11} + a_{33} = \tau_1$ et $s_2 + s_4 = a_{22} + a_{44} = \dfrac{\tau_2}{q_1^2}$. Montrons que $A_i = s_i\left(i=1,2,3,4\right)$ et $A_{13}=0,\ A_{24}=0.$

Établissons premièrement quelques relations auxiliaires. De l'égalité $\dfrac{\left(a_{11}-s_3\right)\left(a_{11}-s_1\right)}{a_{13}^2} = -1$, il résulte $\dfrac{a_{11}-s_1}{a_{13}} = -\dfrac{a_{13}}{a_{11}-s_3}$ et alors on a

$$\frac{1}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\frac{a_{11}-s_1}{a_{13}} = -\frac{1}{1+\left(\dfrac{a_{11}-s_1}{a_{13}}\right)^2}\cdot\frac{1}{\dfrac{a_{11}-s_3}{a_{13}}} = -\frac{a_{13}}{s_1-s_3}$$

et de même

$$\frac{1}{\|\mathbf{v}_3\|^2}\frac{a_{11}-s_3}{a_{13}} = \frac{a_{13}}{s_1-s_3}.$$

Multipliant ces deux égalités membre à membre, on trouve

$$\frac{1}{\|\mathbf{v}_1\|\cdot\|\mathbf{v}_3\|}=\frac{a_{13}}{s_1-s_3}.$$

On a aussi :

$$\frac{1}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\left(\frac{a_{11}-s_1}{a_{13}}\right)^2=-\frac{a_{11}-s_1}{s_1-s_3}=\frac{1}{\|\mathbf{v}_3\|^2},\qquad \frac{1}{\|\mathbf{v}_3\|^2}\left(\frac{a_{11}-s_3}{a_{13}}\right)^2=\frac{a_{11}-s_3}{s_1-s_3}=\frac{1}{\|\mathbf{v}_1\|^2}.$$

On peut obtenir les coefficients A_i, en faisant usage de ces relations, si l'on observe que la somme

$$A_1+A_3=\frac{a_{11}}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\left[1+\left(\frac{a_{11}-s_1}{a_{13}}\right)^2\right]+\frac{a_{33}}{\|\mathbf{v}_3\|^2}\left[1+\left(\frac{a_{11}-s_3}{a_{13}}\right)^2\right]=a_{11}+a_{33}=s_1+s_3=\tau_1.$$

En prenant en considération aussi la différence, on trouve

$$(s_1-s_3)(A_1-A_3)=(a_{11}-a_{33})^2+4a_{13}^2=\tau_1^2-4\tau_3=\Delta_1.$$

Compte tenu que $s_1-s_3=\sqrt{\Delta_1}$, du système obtenu il résulte :

$$A_1=\frac{1}{2}\left(\tau_1+\sqrt{\Delta_1}\right)=s_1,\qquad A_3=\frac{1}{2}\left(\tau_1-\sqrt{\Delta_1}\right)=s_3.$$

Il reste à montrer que $A_{13}=0$. De l'expression de A_{13} et des relations auxiliaires on trouve immédiatement $A_{13}=0$.

En partant de la relation $(a_{22}-s_2)(a_{22}-s_4)/a_{24}^2=-1$ et en procédant comme plus haut, on obtient les expressions des coefficients A_2, A_4 et A_{24} :

$$A_2=\frac{1}{2}\left(\tau_2+\sqrt{\Delta_2}\right)\frac{1}{q_1^2}=s_2,\quad A_4=\frac{1}{2}\left(\tau_2-\sqrt{\Delta_2}\right)\frac{\nu^2}{q_3^2}=s_4,\quad A_{24}=0.$$

Par conséquent, la transformation orthonormée (29) ramène la forme quadratique (18) à la forme canonique. Elle este donc une transformation canonique.

6. Revenons à notre problème, c'est-à-dire à la résolution du système (1) pour le cas de la configuration colinéaire de trois corps. Nous avons réduit plus haut l'énergie cinétique T à une somme de carrés tels que l'hamiltonien du système peut s'écrire

$$H=T-U=\frac{1}{2}\left(s_1p_1^2+s_2'\frac{p_2^2}{q_1^2}+s_3p_3^2+s_4'\frac{p_4^2}{q_3^2}\right)-U, \tag{30}$$

où U donné par (3) s'exprime pour cette configuration sous la forme

$$U=\frac{\kappa}{2}\left(\frac{M}{q_1}+\nu\frac{M}{q_3}\right),\qquad M=m_0m_1+\frac{m_0m_1}{\nu}+\frac{m_1m_2}{1-\nu},$$

avec $q_3=\nu q_1$, où $0<\nu<1$ pour l'ordre $P_0P_2P_1$. L'équation réduite d'Hamilton-Jacobi s'obtient en remplaçant en H

$$p_i=\frac{\partial W}{\partial q_i},\ i=1,2,3,4 \tag{30)'$$

et en écrivant que pendant le mouvement l'énergie du système reste constante. On trouve alors l'équation

$$\frac{1}{2}\left[s_1\left(\frac{\partial W}{\partial q_1}\right)^2+\frac{s_2'}{q_1^2}\left(\frac{\partial W}{\partial q_2}\right)^2+s_3\left(\frac{\partial W}{\partial q_3}\right)^2+\frac{s_4'}{q_3^2}\left(\frac{\partial W}{\partial q_4}\right)^2\right]-U=h=\text{c-te}, \tag{31}$$

qui détermine la fonction $W(q_1,q_2,q_3,q_4)$. On cherche l'intégrale complète de cette équation sous la forme

$$W=W_1(q_1)+W_2(q_2)+W_3(q_3)+W_4(q_4). \tag{32}$$

En remplaçant cette fonction dans l'équation ci-dessus et en rangeant, on obtient

$$s_1\left(\frac{\mathrm{d}W_1}{\mathrm{d}q_1}\right)+\frac{s_2'}{q_1^2}\left(\frac{\mathrm{d}W_2}{\mathrm{d}q_2}\right)^2-\kappa\frac{M}{q_1}-h+s_3\left(\frac{\mathrm{d}W_3}{\mathrm{d}q_3}\right)^2+\frac{s_4'}{q_3^2}\left(\frac{\mathrm{d}W_4}{\mathrm{d}q_4}\right)^2-\kappa\nu\frac{M}{q_3}-h=0. \tag{33}$$

Retournons maintenant au système (1), en considérant la fonction H réduite à la forme (30). De la première suite des équations (1), pour $i=2,4$ on obtient les relations :

$$s_2'p_2=q_1^2\dot q_2 \qquad \text{ou} \qquad \frac{\mathrm{d}W_2}{\mathrm{d}q_2}=\frac{1}{s_2'}q_1^2\dot q_2,$$
$$s_4'p_4=q_3^2\dot q_4 \qquad\qquad \frac{\mathrm{d}W_4}{\mathrm{d}q_4}=\frac{1}{s_4'}q_3^2\dot q_4.$$

En [1] nous avons montré que, pour la configuration colinéaire lorsque la relation $q_3=\nu q_1$ peut être écrite vectoriellement $\vec{\boldsymbol{q}}_3=\nu\vec{\boldsymbol{q}}_1$, les intégrales des aires (5) se ramènent à la forme

$$\Re_1q_1^2\dot q_2=\Re_2q_3^2\dot q_4=C, \tag{34}$$

où $\mathfrak{R}_1$ et $\mathfrak{R}_2$ sont des constantes données dans le travail indiqué. De ces intégrales il résulte que les produits : $q_1^2 \dot{q}_2 = C / \mathfrak{R}_1$, $q_3^2 \dot{q}_4 = C / \mathfrak{R}_2$ restent constants au cours du mouvement et on a :

$$\frac{\mathrm{d}W_2}{\mathrm{d}q_2} = \frac{C}{s_2' \mathfrak{R}_1} = \alpha_2 = \text{c-te}, \qquad \frac{\mathrm{d}W_4}{\mathrm{d}q_4} = \frac{C}{s_4' \mathfrak{R}_2} = \alpha_4 = \text{c-te}. \tag{35}$$

Compte tenu de ces égalités, l'équation d'Hamilton-Jacobi (33) devient

$$s_1 \left(\frac{\mathrm{d}W_1}{\mathrm{d}q_1} \right)^2 + \frac{s_2' \alpha_2^2}{q_1^2} - \kappa \frac{M}{q_1} - h + s_3 \left(\frac{\mathrm{d}W_3}{\mathrm{d}q_3} \right)^2 + \frac{s_4' \alpha_4^2}{q_3^2} - \kappa \nu \frac{M}{q_3} - h = 0 .$$

On peut à présent séparer les variables

$$s_1 \left(\frac{\mathrm{d}W_1}{\mathrm{d}q_1} \right)^2 + \frac{s_2' \alpha_2^2}{q_1^2} - \kappa \frac{M}{q_1} - h = - s_3 \left(\frac{\mathrm{d}W_3}{\mathrm{d}q_3} \right)^2 - \frac{s_4' \alpha_4^2}{q_3^2} + \kappa \nu \frac{M}{q_3} + h .$$

Le premier membre étant fonction seulement de q_1 et la deuxième fonction seulement de q_3, l'égalité este possible si toutes les deux fonctions sont égales à la même constante positive ou nulle que nous notons par $\alpha_3 \geq 0$. Il en résulte les équations :

$$\left. \begin{aligned} & s_1 \left(\frac{\mathrm{d}W_1}{\mathrm{d}q_1} \right)^2 + \frac{s_2' \alpha_2^2}{q_1^2} - \kappa \frac{M}{q_1} - h = \alpha_3, \\ & s_3 \left(\frac{\mathrm{d}W_3}{\mathrm{d}q_3} \right)^2 + \frac{s_4' \alpha_4^2}{q_3^2} - \kappa \nu \frac{M}{q_3} - h = - \alpha_3. \end{aligned} \right\} \tag{36}$$

Par l'intégration des équations (35) et (36) on obtient les fonctions $W_i(q_i)$, donc la fonction (32). Après les calculs, l'intégrale complète de l'équation réduite d'Hamilton-Jacobi sera

$$\begin{aligned} S = -\alpha_1 t + \alpha_2 q_2 + \alpha_4 q_4 + \frac{1}{\sqrt{s_1}} \int_{q_1^0}^{q_1} \sqrt{\alpha_1 + \alpha_3 + \kappa \frac{M}{q_1} - \frac{s_2' \alpha_2^2}{q_1^2}} \, \mathrm{d}q_1 + \\ + \frac{1}{\sqrt{s_3}} \int_{q_3^0}^{q_3} \sqrt{\alpha_1 - \alpha_3 + \kappa \nu \frac{M}{q_3} - \frac{s_4' \alpha_4^2}{q_3^2}} \, \mathrm{d}q_3 + a , \end{aligned}$$

où l'on a noté $h = \alpha_1$ et par a une constante additive arbitraire.

La solution générale est donnée par les relations :

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = -t + \frac{\partial W_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial W_3}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \qquad \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = q_2 + \frac{\partial W_1}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \tag{37}$$

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_3} = \frac{\partial W_1}{\partial \alpha_3} + \frac{\beta W_3}{\partial \alpha_3} = \beta_3, \qquad \frac{\partial S}{\partial \alpha_4} = q_4 + \frac{\partial W_3}{\partial \alpha_4} = \beta_4,$$

où β_i sont de nouvelles constantes arbitraires. La deuxième et la quatrième égalité ci-dessus décrivent l'aspect géométrique du mouvement (la trajectoire) et s'appellent intégrales géométriques. De (30)' nous obtenons encore

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = \frac{\partial W}{\partial q_i} = p_i, \qquad i = 1, 2, 3, 4.$$

7. Nous nous occupons, par la suite, des intégrales géométriques. La première intégrale géométrique s'écrit selon la dérivation

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = q_2 + \frac{\partial W_1}{\partial \alpha_2} = q_2 - \frac{s_2'\alpha_2}{\sqrt{s_1}} \int_{q_1^0}^{q_1} \frac{\mathrm{d}q_1}{q_1^2 \sqrt{\alpha_1 + \alpha_3 + \kappa \frac{M}{q_1} - \frac{s_2'\alpha_2^2}{q_1^2}}} = \beta_2 .$$

Pour effectuer la quadrature introduisons la variable $\sigma = 1/q_1$ et l'égalité ci-dessus devient

$$q_2 - \beta_2 = -\frac{s_2'\alpha_2}{\sqrt{s_1}} \int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{\mathrm{d}\sigma}{\sqrt{-\left(s_2'\alpha_2^2\sigma^2 - \kappa M\sigma - \alpha_1 - \alpha_3\right)}} .$$

Soient σ_1 et σ_2 $(\sigma_1 > \sigma_2)$ les racines de l'équation :

$\left(s_2'\alpha_2^2\sigma^2 - \kappa M\sigma - \alpha_1 - \alpha_3\right) = 0$.

Alors le trinôme se décompose ainsi :

$$\left(s_2'\alpha_2^2\sigma^2 - \kappa M\sigma - \alpha_1 - \alpha_3\right) = -s_2'\alpha_2^2(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2) = s_2'\alpha_2^2(\sigma_1 - \sigma)(\sigma - \sigma_2)$$

et, en considérant pour σ les valeurs pour lesquelles la quantité sous le radical est positive, l'équation ci-dessus se ramène à

$$q_2 - \beta_2 = -\sqrt{\frac{s_2'}{s_1}} \int_{\sigma_1^0}^{\sigma} \frac{\mathrm{d}\sigma}{\sqrt{(\sigma_1 - \sigma)(\sigma - \sigma_2)}} . \qquad (38)$$

Nous poursuivons l'intégration par l'introduction d'une nouvelle variable u à l'aide de la relation

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} u . \qquad (39)$$

Il faut observer que pour $\sigma = \sigma_1$ on a $u = 1$. On a aussi les relations :

$$\sigma_1 - \sigma = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)(1 - u), \qquad \sigma - \sigma_2 = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)(1 + u) ;$$

à l'aide de celles-ci, de (38) on obtient :

$$q_2-\beta_2=-\sqrt{\frac{s_2'}{s_1}}\int_1^u\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}=\sqrt{\frac{s_2'}{s_1}}\ \arccos u$$

d'où

$$u=\cos\sqrt{\frac{s_1}{s_2'}}\left(q_2-\beta_2\right)\ .$$

Pour calculer la trajectoire, revenons à la substitution (39) et on tient compte que $\sigma=\frac{1}{r_1}$. Écrivons ensuite les racines de l'équation en σ et formons les relations :

$$\sigma_1+\sigma_2=\frac{\kappa M}{s_2'\alpha_2^2},\qquad \sigma_1-\sigma_2=\frac{\kappa M}{s_2'\alpha_2^2}\sqrt{1+\frac{4s_2'\alpha_2^2\left(\alpha_1+\alpha_3\right)}{\left(\kappa M\right)^2}}.$$

En les introduisant en (39), après les calculs, on trouve

$$r_1=\frac{\mathcal{P}_1}{1+\varepsilon_1\cos\sqrt{\frac{s_1}{s_2'}}\left(\theta_1-\beta_2\right)}\ ,$$

où l'on a noté :

$$\mathcal{P}_1=\frac{2s_2'\alpha_2^2}{\kappa M},\qquad \varepsilon_1=\sqrt{1+\frac{4s_2'\alpha_2^2\left(\alpha_1+\alpha_3\right)}{\left(\kappa M\right)^2}}\ .$$

L'équation obtenue est une conique.

En partant de la dernière intégrale géométrique (37) et en procédant comme plus haut, on trouve la conique

$$r_2=\frac{\mathcal{P}_2}{1+\varepsilon_2\cos\sqrt{\frac{s_3}{s_4'}}\left(\theta_2-\beta_4\right)},$$

avec les notations :

$$\mathcal{P}_2=\frac{2s_4'\alpha_4^2}{\kappa\nu M},\qquad \varepsilon_2=\sqrt{1+\frac{4s_4'\alpha_4^2\left(\alpha_1-\alpha_3\right)}{\left(\kappa\nu M\right)^2}}\ .$$

Sont restées indéterminées les constantes $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$. Elles doivent être déterminées de sorte qu'au cours du mouvement on ait satisfaite la relation $r_2=\nu\, r_1$. En écrivant que cette relation a lieu lorsqu'on a : $\mathcal{P}_2=\nu\mathcal{P}_1$ et $\varepsilon_1=\varepsilon_2$, on obtient $\alpha_3=0$. Pour déterminer les constantes α_2^2,α_4^2 il faut observer que les égalités ci-dessus ont lieu pour les valeurs :

$$\alpha_2^2 = \tau_2 - \sqrt{\Delta_2} = \frac{2s_4'}{\nu^2}, \qquad \alpha_4^2 = \tau_2 + \sqrt{\Delta_2} = 2s_2'.$$

De ces relations il résulte que $s_2' > 0,\ s_4' > 0$ de sorte que la nature des coniques dépend de la grandeur de α_1. Ainsi, on aura des ellipses lorsque $\alpha_1 < 0$, des paraboles pour $\alpha_1 = 0$ et des hyperboles si $\alpha_1 > 0$.

Pour interpréter les constantes β_2 et β_4 on remarque que, à cause de la relation $r_2 = \nu r_1$, lorsque $\beta_2 = \theta_1$ on a $r_1 = r_{1\min},\ r_2 = r_{2\min}$ et les deux corps passent simultanément à leurs péricentres. Par conséquent, les constantes β_2 et β_4 signifient les valeurs de θ_1 et θ_2 à l'instant de passage de ces deux corps à leurs péricentres. On les note par $\beta_2 = \theta_1^0,\ \beta_4 = \theta_2^0$ et on a $\beta_2 = \beta_4 = \theta_1^0 = \theta_2^0$.

Dans le cas tout à fait particulier lorsque $\nu = 1$ on a $\tau_1 = \tau_2,\ \Delta_1 = \Delta_2$ et les corps m_1 et m_2 sont confondus ; on a un problème des deux corps de masses m_0 et $(m_1 + m_2)$. Les rapports :

$$\frac{s_1}{s_2'} = \frac{\tau_1 + \sqrt{\Delta_1}}{\tau_2 + \sqrt{\Delta_2}} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{s_3}{s_4'} = \frac{\tau_1 - \sqrt{\Delta_1}}{\tau_2 - \sqrt{\Delta_2}} = 1$$

sont égaux et par conséquent, dans ce cas, les pulsations de ces deux mouvements sont égales.

8. Dans la présente section nous étudions le cas lorsque $\cos\gamma = 0,\ \ \gamma = q_4 - q_2 = \pi/2$, c'est-à-dire le cas lorsque les trois corps forment la configuration de triangle rectangle où le rapport de rayons vecteurs reste constant au cours du mouvement. De (7) on a : $a_{13} = a_{31} = 0,\ a_{42} = a_{24} = 0$. L'énergie cinétique (6) se ramène à

$$F = 2T = a_{11}p_1^2 + a_{22}p_2^2 + a_{33}p_3^2 + a_{44}p_4^2 + 2a_{14}p_1p_4 + 2a_{23}p_2p_3 \tag{40}$$

qui est aussi une forme quadratique. Les valeurs des coefficients a_{ij} sont pour cette configuration :

$$\begin{array}{llll} a_{11} = \dfrac{1}{\bar{\mu}_1}, & a_{12} = 0, & a_{13} = 0, & a_{14} = -\dfrac{1}{m_0 q_3}, \\[2ex] a_{21} = 0, & a_{22} = \dfrac{1}{\bar{\mu}_1 q_1^2} & a_{23} = \dfrac{1}{m_0 q_1}, & a_{24} = 0, \\[2ex] a_{31} = 0, & a_{32} = \dfrac{1}{m_0 q_1} & a_{33} = \dfrac{1}{\bar{\mu}_2}, & a_{34} = 0, \\[2ex] a_{41} = -\dfrac{1}{m_0 q_3}, & a_{42} = 0, & a_{43} = 0, & a_{44} = \dfrac{1}{\bar{\mu}_2 q_3^2}. \end{array} \tag{41}$$

Elles montrent que la matrice **A** de la forme quadratique est symétrique et, avec les valeurs a_{ij} ci-dessus, le discriminant de la forme quadratique est

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = \frac{m}{m_0 m_1 m_2} \neq 0,$$

où $m = m_0 + m_1 + m_2$. On a une forme quadratique non dégénérée. Nous nous proposons de la ramener à la forme canonique (12). L'équation séculaire qui détermine les coefficients s_i est

$$\begin{vmatrix} a_{11}-s & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & a_{22}-s & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33}-s & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & a_{44}-s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}-s & a_{14} \\ a_{41} & a_{44}-s \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{22}-s & a_{23} \\ a_{32} & a_{33}-s \end{vmatrix} = 0. \tag{42}$$

Elle se décompose en deux équations séculaires. La première

$$\begin{vmatrix} a_{11}-s & a_{14} \\ a_{41} & a_{44}-s \end{vmatrix} = s^2 - \left(a_{11} + a_{44}\right)s + a_{11}a_{44} - a_{14}^2 = 0, \tag{43}$$

avec les solutions :

$$s_1 = \frac{1}{2}\left(\tau_2 + \sqrt{\Delta_2}\right), \quad s_4 = \frac{1}{2}\left(\tau_2 - \sqrt{\Delta_2}\right) \tag{43'}$$

et la deuxième

$$\begin{vmatrix} a_{22}-s & a_{23} \\ a_{32} & a_{33}-s \end{vmatrix} = s^2 - \left(a_{22} + a_{33}\right)s + a_{22}a_{33} - a_{23}^2 = 0, \tag{44}$$

ayant les solutions :

$$s_2 = \frac{1}{2}\left(\tau_1 + \sqrt{\Delta_1}\right), \quad s_3 = \frac{1}{2}\left(\tau_1 - \sqrt{\Delta_1}\right), \tag{44'}$$

où l'on a noté :

$$\tau_1 = \frac{1}{\bar{\mu}_2} + \frac{1}{\bar{\mu} q_1^2}, \quad \tau_2 = \frac{1}{\bar{\mu}_1} + \frac{1}{\bar{\mu}_2 q_3^2}, \quad \tau_3 = \frac{1}{\bar{\mu}_1 \bar{\mu}_2} - \frac{1}{m_0^2},$$

$$\Delta_1 = \tau_1^2 - \frac{4\tau_3}{q_1^2}, \quad \Delta_2 = \tau_2^2 - \frac{4\tau_3}{q_3^2}.$$

Les solutions s_i ainsi trouvées sont les valeurs propres de l'équation séculaire (42). Elles permettent de ramener la forme quadratique (40) à la forme canonique (12), telle qu'on peut écrire

$$\Phi = 2T = s_1 p_1^2 + s_2 p_2^2 + s_3 p_3^2 + s_4 p_4^2. \tag{45}$$

9. On peut réduire la forme quadratique (40) à la forme canonique (45) par une transformation linéaire orthogonale. Montrons que, aussi dans cette configuration, on peut trouver une telle transformation à l'aide des valeurs propres s_i ci-dessus. En procédant comme dans le cas colinéaire, le système qui détermine les coordonnées p_1 et p_4 des vecteurs propres $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_4$ s'obtient de (43) et pour la valeur propre $s = s_1$ est

$$\left.\begin{array}{lcll}(a_{11} - s_1) p_1 & + & a_{14} p_4 & = 0, \\ a_{41} p_1 & + & (a_{44} - s_1) p_4 & = 0.\end{array}\right\}$$

En résolvant ce système, on trouve :

$$p_1 = k, \quad p_4 = -\frac{a_{11} - s_1}{a_{14}} k,$$

où k est un nombre arbitraire. Le vecteur propre $\mathbf{v}_1$ correspondant à la valeur propre $s = s_1$ est

$$\mathbf{v}_1 = k\left(\mathbf{e}_1 - \frac{a_{11} - s_1}{a_{14}} \mathbf{e}_4\right).$$

Le même système résolu pour la valeur propre $s = s_4$ nous conduit au vecteur propre

$$\mathbf{v}_4 = k\left(\mathbf{e}_1 - \frac{a_{11} - s_4}{a_{14}} \mathbf{e}_4\right).$$

En prenant $k = 1$ on peut montrer que les deux vecteurs $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_4$ sont orthogonaux, c'est-à-dire $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_4) = 0$, si l'on tient compte qu'on a $(a_{11} - s_1)(a_{11} - s_4)/a_{14}^2 = -1$.

En procédant de la même manière avec l'équation séculaire (44) ayant les valeurs propres s_2 et s_3, on obtient les vecteurs propres :

$$\mathbf{v}_2 = k\left(\mathbf{e}_2 - \frac{a_{22} - s_2}{a_{23}} \mathbf{e}_3\right), \qquad \mathbf{v}_3 = k\left(\mathbf{e}_2 - \frac{a_{22} - s_3}{a_{23}} \mathbf{e}_3\right),$$

avec k – un nombre arbitraire. Ils sont également orthogonaux $(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = 0$, si on a en vue la relation $(a_{22} - s_2)(a_{22} - s_3)/a_{23}^2 = -1$.

D'ailleurs, on peut montrer que l'ensemble de vecteurs $\mathbf{v}_i\ (i=1,2,3,4)$ forment un système orthogonal. En effet, en normant ces vecteurs on trouve la transformation linéaire orthonormée :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|}=\mathbf{e}'_1 &= \beta_{11}\mathbf{e}_1+\beta_{12}\mathbf{e}_2+\beta_{13}\mathbf{e}_3+\beta_{14}\mathbf{e}_4\,,\\ \mathbf{e}'_2 &= \beta_{21}\mathbf{e}_1+\beta_{22}\mathbf{e}_2+\beta_{23}\mathbf{e}_3+\beta_{24}\mathbf{e}_4\,,\\ \mathbf{e}'_3 &= \beta_{31}\mathbf{e}_1+\beta_{32}\mathbf{e}_2+\beta_{33}\mathbf{e}_3+\beta_{34}\mathbf{e}_4\,,\\ \mathbf{e}'_4 &= \beta_{41}\mathbf{e}_1+\beta_{42}\mathbf{e}_2+\beta_{43}\mathbf{e}_3+\beta_{44}\mathbf{e}_4\,,\end{aligned}\right\} \tag{46}$$

où

$$\|\mathbf{v}_1\|=\sqrt{(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_1)}=k\sqrt{1+\left(\frac{a_{11}-s_1}{a_{14}}\right)^2}$$

sont les longueurs de vecteurs $\mathbf{v}_i$ et pour $k=1$ les coefficients β_{ij} ont les expressions :

$$\begin{aligned} &\beta_{11}=\frac{1}{\|\mathbf{v}_1\|},\quad \beta_{12}=0,\quad \beta_{13}=0,\quad \beta_{14}=-\frac{1}{\|\mathbf{v}_1\|}\frac{a_{11}-s_1}{a_{14}},\\ &\beta_{21}=0,\quad \beta_{22}=\frac{1}{\|\mathbf{v}_2\|},\quad \beta_{23}=-\frac{1}{\|\mathbf{v}_2\|}\frac{a_{22}-s_2}{a_{23}},\quad \beta_{24}=0,\\ &\beta_{31}=0,\quad \beta_{32}=\frac{1}{\|\mathbf{v}_3\|},\quad \beta_{33}=-\frac{1}{\|\mathbf{v}_3\|}\frac{a_{22}-s_3}{a_{23}},\quad \beta_{34}=0,\\ &\beta_{41}=\frac{1}{\|\mathbf{v}_4\|},\quad \beta_{42}=0,\quad \beta_{43}=0\,,\quad \beta_{44}=-\frac{1}{\|\mathbf{v}_4\|}\frac{a_{11}-s_4}{a_{14}}.\end{aligned} \tag{47}$$

Si l'on note par **B** la matrice de la transformation linéaire (46) et par **B'** sa transposée, la condition d'orthogonalité est $\mathbf{B}\,\mathbf{B}'=\mathbf{E}$, **E** étant la matrice unité d'ordre quatre. Explicitée, cette égalité se traduit par les relations (28), relations qui sont satisfaites par les coefficients β_{ij} de (47). Par conséquent, les vecteurs $\mathbf{v}_i$ forment un système orthogonal comme sa matrice **B**. La transformation $(p_i)\to(p'_i)$ de matrice **B** avec les valeurs β_{ij} données par (47) est la transformation linéaire orthonormée cherchée :

$$\begin{aligned} &p_1=\frac{1}{\|\mathbf{v}_1\|}p'_1-\frac{1}{\|\mathbf{v}_1\|}\frac{a_{11}-s_1}{a_{14}}p'_4, \qquad p_2=\frac{1}{\|\mathbf{v}_2\|}p'_2-\frac{1}{\|\mathbf{v}_2\|}\frac{a_{22}-s_2}{a_{23}}p'_3,\\ &p_3=\frac{1}{\|\mathbf{v}_3\|}p'_2-\frac{1}{\|\mathbf{v}_3\|}\frac{a_{22}-s_3}{a_{23}}p'_3, \qquad p_4=\frac{1}{\|\mathbf{v}_1\|}p'_1-\frac{1}{\|\mathbf{v}_4\|}\frac{a_{11}-s_4}{a_{14}}p'_4.\end{aligned}$$

Elle ramène la forme quadratique (40) à la forme canonique (45).

10. Nous avons réduit plus haut en deux manières l'énergie cinétique T à une somme de carrés tels que l'hamiltonien du système (1) peut s'écrire sous la forme

$$H=T-U=\frac{1}{2}\left(s_1p_1^2+s_2p_2^2+s_3p_3^2+s_4p_4^2\right)-U\ ,$$

où U donnée par (3) devient pour cette configuration

$$U=\frac{\kappa}{2}\left(\frac{M}{q_1}+\nu\frac{M}{q_3}\right),\quad M=m_0m_1+\frac{m_0m_2}{\nu}+\frac{m_1m_2}{\sigma_0},\quad \sigma_0=\left(1+\nu^2\right)^{1/2}$$

avec $0<\nu<1$ si $q_3<q_1$ $\left(q_3=\nu q_1\right)$. En introduisant en H

$$p_i=\frac{\partial W}{\partial q_i},\quad i=1,2,3,4$$

et en écrivant que pendant le mouvement l'énergie du système reste constante, on obtient l'équation réduite d'Hamilton-Jacobi :

$$\frac{1}{2}\left[s_1\left(\frac{\partial W}{\partial q_1}\right)^2+s_2\left(\frac{\partial W}{\partial q_2}\right)^2+s_3\left(\frac{\partial W}{\partial q_3}\right)^2+s_4\left(\frac{\partial W}{\partial q_4}\right)^2\right]-U=h=\text{c-te}$$

qui détermine la fonction $W\left(q_1,q_2,q_3,q_4\right)$. On cherche l'intégrale complète de cette équation sous la forme

$$W=W_1\left(q_1\right)+W_2\left(q_2\right)+W_3\left(q_3\right)+W_4\left(q_4\right).\tag{48}$$

En remplaçant cette fonction dans l'équation ci-dessus, on obtient

$$s_1\left(\frac{\mathrm{d}W_1}{\mathrm{d}q_1}\right)^2+s_2\left(\frac{\mathrm{d}W_2}{\mathrm{d}q_2}\right)^2+s_3\left(\frac{\mathrm{d}W_3}{\mathrm{d}q_3}\right)^2+s_4\left(\frac{\mathrm{d}W_4}{\mathrm{d}q_4}\right)^2-2U=2h\ .$$

Si à présent nous substituons les expressions de s_i de (43)', (44)' et de U, l'équation d'Hamilton-Jacobi devient :

$$\frac{1}{2}\tau_2\left[\left(\frac{\mathrm{d}W_1}{\mathrm{d}q_1}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}W_4}{\mathrm{d}q_4}\right)^2\right]+\frac{1}{2}\sqrt{\Delta_2}\left[\left(\frac{\mathrm{d}W_1}{\mathrm{d}q_1}\right)^2-\left(\frac{\mathrm{d}W_4}{\mathrm{d}q_4}\right)^2\right]+\frac{1}{2}\tau_1\left[\left(\frac{\mathrm{d}W_3}{\mathrm{d}q_3}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}W_2}{\mathrm{d}q_2}\right)^2\right]-$$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{\Delta_1}\left[\left(\frac{\mathrm{d}W_3}{\mathrm{d}q_3}\right)^2-\left(\frac{\mathrm{d}W_2}{\mathrm{d}q_2}\right)^2\right]-\kappa\frac{M}{q_1}-\kappa\nu\frac{M}{q_3}-2h=0\ .\tag{49}$$

Nous considérons les solutions de cette équation pour lesquelles on a :

$$\frac{\mathrm{d}W_1}{\mathrm{d}q_1}=\frac{\mathrm{d}W_4}{\mathrm{d}q_4}=\alpha_4, \qquad \frac{\mathrm{d}W_3}{\mathrm{d}q_3}=\frac{\mathrm{d}W_2}{\mathrm{d}q_2}=\alpha_2, \tag{50}$$

où α_2, α_4 sont des constantes arbitraires. Nous distinguerons, plus loin, deux solutions. Pour la première, des relations (50) on déduit :

$$W_2(q_2)=\alpha_2 q_2+C_2, \quad W_4(q_4)=\alpha_4 q_4+C_4, \tag{51}$$

avec C_2 et C_4 deux constantes arbitraires. Pour avoir les fonctions $W_1(q_1)$ et $W_3(q_3)$ de l'équation (49) on tient compte des égalités (50) de sorte que l'équation (49) se ramène à

$$\tau_2\left(\frac{\mathrm{d}W_1}{\mathrm{d}q_1}\right)^2+\tau_1\left(\frac{\mathrm{d}W_3}{\mathrm{d}q_3}\right)^2-\kappa\frac{M}{q_1}-\kappa\nu\frac{M}{q_3}-2h=0.$$

Si à présent on remplace les expressions de τ_1 et τ_2 et on a en vue les relations (50), on obtient l'équation

$$\frac{1}{\bar{\mu}_1}\left(\frac{\mathrm{d}W_1}{\mathrm{d}q_1}\right)^2+\frac{\alpha_2^2}{\bar{\mu}q_1^2}-\kappa\frac{M}{q_1}-h+\frac{1}{\bar{\mu}_2}\left(\frac{\mathrm{d}W_3}{\mathrm{d}q_3}\right)^2+\frac{\alpha_4^2}{\bar{\mu}q_3^2}-\kappa\nu\frac{M}{q_3}-h=0.$$

On peut maintenant séparer les variables en écrivant

$$\frac{1}{\bar{\mu}_1}\left(\frac{\mathrm{d}W_1}{\mathrm{d}q_1}\right)^2+\frac{\alpha_2^2}{\bar{\mu}_1 q_1^2}-\kappa\frac{M}{q_1}-h=-\frac{1}{\bar{\mu}_2}\left(\frac{\mathrm{d}W_3}{\mathrm{d}q_3}\right)^2-\frac{\alpha_4^2}{\bar{\mu}_2 q_3^2}+\kappa\nu\frac{M}{q_3}+h.$$

Comme le premier membre est fonction seulement de q_1 et le second seulement de q_3, l'égalité est possible seulement si tous les deux membres sont égaux à la même constante positive ou nulle $\alpha_3\geq 0$. D'où il résulte les équations :

$$\frac{1}{\bar{\mu}_1}\left(\frac{\mathrm{d}W_1}{\mathrm{d}q_1}\right)^2=h+\alpha_3+\kappa\frac{M}{q_1}-\frac{\alpha_2^2}{\bar{\mu}_1 q_1^2}, \qquad \frac{1}{\bar{\mu}_2}\left(\frac{\mathrm{d}W_3}{\mathrm{d}q_3}\right)^2=h-\alpha_3+\kappa\nu\frac{M}{q_3}-\frac{\alpha_4^2}{\bar{\mu}_2 q_3^2}.$$

En intégrant ces équations on obtient les fonctions $W_1(q_1)$ et $W_3(q_3)$ de sorte que de pair avec les fonctions (51) permettent d'écrire l'intégrale complète de l'équation réduite d'Hamilton-Jacobi :

$$S=-\alpha_1 t+\alpha_2 q_2+\alpha_4 q_4+\sqrt{\bar{\mu}_1}\int_{q_1^0}^{q_1}\sqrt{\alpha_1+\alpha_3+\kappa\frac{M}{q_1}-\frac{\alpha_2^2}{\bar{\mu}_1 q_1^2}}\,\mathrm{d}q_1+$$

$$+\sqrt{\bar{\mu}_2}\int_{q_3^0}^{q_3}\sqrt{\alpha_1-\alpha_3+\kappa\nu\frac{M}{q_3}-\frac{\alpha_4^2}{\bar{\mu}_2 q_3^2}}\,\mathrm{d}q_3 + a, \tag{52}$$

où $h = \alpha_1$ et a est une constante additive arbitraire.

L'intégrale générale est donnée par les relations :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = -t + \frac{\partial W_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial W_3}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \qquad &&\frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = q_2 + \frac{\partial W_1}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \\ &\frac{\partial S}{\partial \alpha_3} = \frac{\partial W_1}{\partial \alpha_3} + \frac{\partial W_3}{\partial \alpha_3} = \beta_3, \qquad &&\frac{\partial S}{\partial \alpha_4} = q_4 + \frac{\partial W_3}{\partial \alpha_4} = \beta_4, \end{aligned} \tag{53}$$

où β_i sont de nouvelles constantes arbitraires. A celles-ci on ajoute la suite d'intégrales :

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = \frac{\partial W}{\partial q_i} = p_i, \qquad i = 1, 2, 3, 4.$$

11. Poursuivons maintenant le calcul pour trouver les trajectoires parcourus par ces deux corps. Dans ce but nous étudierons les intégrales géométriques. La voie étant analogue à celle du cas précédent, nous allons l'esquisser très rapidement. Écrivons pour cela la première intégrale géométrique d'après dérivation

$$q_2 + \frac{\partial W_1}{\partial \alpha_2} = q_2 - \frac{\alpha_2}{\sqrt{\bar{\mu}_1}} \int_{q_1^0}^{q_1} \frac{\mathrm{d}q_1}{q_1^2 \sqrt{\alpha_1 + \alpha_3 + \kappa \dfrac{M}{q_1} - \dfrac{\alpha_2^2}{\mu_1 q_1^2}}} = \beta_2.$$

Plus loin, pour calculer la quadrature, introduisons la variable $\sigma = 1/q_1 = 1/r_1$; l'intégrale devient

$$q_2 - \beta_2 = -\int_{\sigma_1^0}^{\sigma} \frac{\mathrm{d}\sigma}{\sqrt{(\sigma_1 - \sigma)(\sigma - \sigma_2)}},$$

où σ_1, σ_2 $(\sigma_1 > \sigma_2)$ sont les racines de l'équation

$$\alpha_2^2 \sigma^2 - \kappa \bar{\mu}_1 M \sigma - \bar{\mu}_1 (\alpha_1 + \alpha_3) = 0.$$

Pour réaliser l'intégration on passe à une nouvelle variable u par la substitution

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} u. \tag{54}$$

Observons, pour fixer les limites d'intégration, que pour $\sigma = \sigma_1$ on obtient $u = 1$. En écrivant les racines de l'équation en σ, σ_1 et σ_2, on peut calculer $\sigma_1 + \sigma_2$ et $\sigma_1 - \sigma_2$, par conséquent $\sigma_1 - \sigma$ et $\sigma - \sigma_2$ et l'intégrale ci-dessus se ramène à

$$q_2 - \beta_2 = -\int_1^u \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}} = \arccos u .$$

En prenant le cosinus de cette égalité, on trouve $\cos(q_2 - \beta_2) = u$.

Pour le calcul de la trajectoire, on revient à la substitution (54) et on tient compte que $\sigma = 1/r_1$. Selon les calculs, on trouve :

$$r_1 = \frac{\mathcal{P}_1}{1 + \varepsilon_1 \cos(\theta_1 - \beta_2)},$$

où l'on a noté :

$$\mathcal{P}_1 = \frac{2\alpha_2^2}{\kappa \bar{\mu}_1 M}, \quad \varepsilon_1 = \sqrt{1 + \frac{4\alpha_2^2(\alpha_1 + \alpha_3)}{\bar{\mu}_1 (\kappa M)^2}} .$$

On voit que la trajectoire décrite par le corps $P_1(m_1)$ est une section conique.

En suivant la même voie que ci-dessus, en partant de la seconde intégrale géométrique (53), il résulte que le corps $P_2(m_2)$ décrit également une section conique de l'équation polaire

$$r_2 = \frac{\mathcal{P}_2}{1 + \varepsilon_2 \cos(\theta_2 - \beta_4)},$$

ayant les éléments :

$$\mathcal{P}_2 = \frac{2\alpha_4^2}{\kappa \nu \bar{\mu}_2 M}, \quad \varepsilon_2 = \sqrt{1 + \frac{4\alpha_4^2(\alpha_1 - \alpha_3)}{\bar{\mu}_2 (\kappa \nu M)^2}} .$$

Les constantes $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ restent indéterminées. Elles doivent être déterminées de telle sorte qu'au cours du mouvement les relations $r_2 = \nu r_1$, $\theta_2 - \theta_1 = \pi/2$ soient satisfaites. Ceci arrive lorsqu'on a : $\mathcal{P}_2 = \nu \mathcal{P}_1$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$. De la première égalité on obtient $\alpha_4^2/\nu^2\bar{\mu}_2 = \alpha_2^2/\bar{\mu}_1$. Compte tenu de celle-ci, la deuxième relation nous fournit $\alpha_3 = 0$. On trouve α_2^2, α_4^2 si l'on observe que les relations de condition ci-dessus sont satisfaites lorsqu'on prend :

$$\alpha_2^2 = \frac{2\bar{\mu}_1}{\nu^2}, \quad \alpha_4^2 = 2\bar{\mu}_2 .$$

La nature des coniques dépend de la grandeur de α_1. On aura des ellipses pour $\alpha_1 < 0$, des paraboles lorsque $\alpha_1 = 0$ et des hyperboles si $\alpha_1 > 0$.

L'interprétation des constantes β_2 et β_4 se fait en observant que pour $\beta_2 = \theta_1$ on a $r_1 = r_{1\min}$ et pour $\beta_4 = \theta_2$, $r_2 = r_{2\min}$. A cause de la relation $r_2 = \nu r_1$

tous les deux corps passent simultanément à leurs péricentres. Si l'on note par θ_1^0 et θ_2^0 leurs valeurs à ce moment-là, on a $\theta_2^0 - \theta_1^0 = \beta_4 - \beta_2 = \pi/2$.

La question qui se pose à présent est de connaître si dans ces points $P_1(m_1)$ et $P_2(m_2)$ existent des corps célestes ou au moins une agglomération de matière. Il faudra démontrer cela par observations astronomiques, c'est la charge des astronomes observateurs.

12. Nous retournons maintenant aux relations (50). On peut obtenir les fonctions $W_1(q_1)$ et $W_3(q_3)$ même de ces relations. On a :

$$W_1(q_1) = \alpha_4 q_1 + C_1, \qquad W_3(q_3) = \alpha_2 q_3 + C_3,$$

C_1 et C_3 étant des constantes arbitraires. Si l'on tient compte de (51), on trouve la fonction W de (48) sous la forme

$$W = \alpha_4 q_1 + \alpha_2 q_2 + \alpha_2 q_3 + \alpha_4 q_4 + C.$$

L'intégrale complète de l'équation réduite d'Hamilton-Jacobi est

$$S = -\alpha_1 t + \alpha_4 q_1 + \alpha_2 q_2 + \alpha_2 q_3 + \alpha_4 q_4 + C$$

et la solution générale est donnée par les relations (53) qui pour ce cas deviennent :

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = -t = \beta_1, \qquad \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = q_2 + q_3 = \beta_2, \qquad \frac{\partial S}{\partial \alpha_4} = q_1 + q_4 = \beta_4, \tag{55}$$

$\beta_1, \beta_2, \beta_4$ étant des constantes arbitraires. Revenons maintenant à la notation r, θ. En prenant pour les constantes β les valeurs : $\beta_4 = \pi/2$ et $\beta_2 = -\pi/2$ et, en tenant compte que $\theta_2 - \theta_1 = \pi/2$, des deux dernières égalités (55) on obtient les équations polaires :

$$r_1 = -\theta_1, \quad r_2 = -\theta_2.$$

Les courbes décrites par ces équations sont des spirales d'Archimède (Fig.1). En effet, rappelons que la courbe décrite par un point P_1 qui se meut avec une vitesse constante v le long d'un rayon tournant autour du pôle P_0 avec une vitesse angulaire constante ω, est la spirale d'Archimède. Son équation polaire est $r_1 = a\theta_1, \quad a = \dfrac{v}{\omega} = \text{c-te}$.

En particulier, lorsque la vitesse linéaire v est égale à la vitesse angulaire ω, on a $a = 1$ et on obtient les équations polaires ci-dessus. Le signe (–) montre que la rotation a lieu au sens des aiguilles d'une montre.

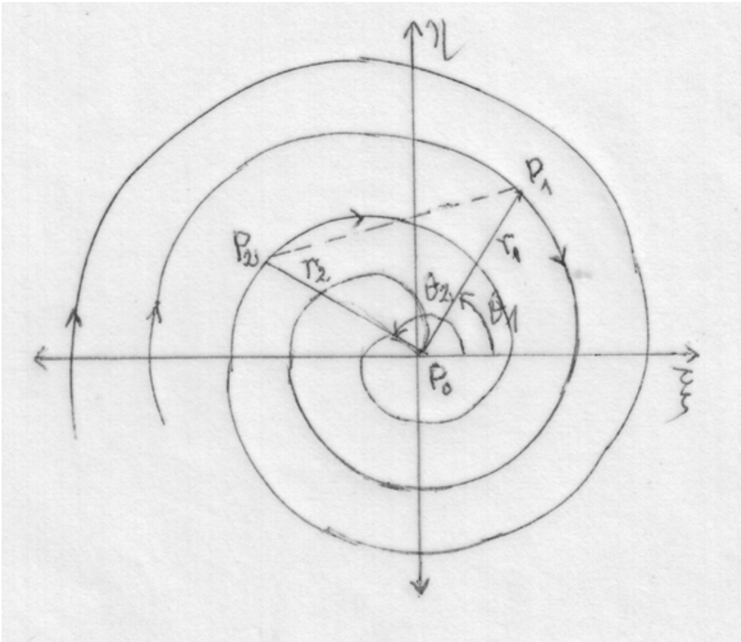

Fig.1 – Mouvement sous forme de spirale d'Archimède.

Les résultats obtenus plus haut montrent que, sous l'effet combiné des forces de gravitation et de rotation du noyau, un corps peut décrire non seulement une section conique ou une spirale logarithmique mais aussi une spirale d'Archimède. La Nature nous offre de tels mouvements, par exemple les galaxies spirales NGC 488 et NGC 5364 paraissent confirmer l'existence de ces trajectoires.

Reçu le 21 Novembre 2007

BIBLIOGRAPHIE

1. ŢOPAN T. GHEORGHE, *Sur une intégrale première transcendante contenant explicitement le temps dans le problème des trois corps*, Rev. Roum. Sci. Techn. – Méc. Appl., **43**, *4*, pp.417-438, 1998.
2. STÄCKEL PAUL, *Über die Integration der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung mittelst Separation der Variablen*, Habilitation, Halle, 1891.
3. STÄCKEL PAUL, *Über die Bewegung eines Punktes in einer n-fachen Mannigfaltigkeit*, Mathematischen Annalen, **42**, pp.537-563, 1893.