

# SUR LA DEFORMATION D'UN TUBE CYLINDRIQUE

DANA MIHAELA PETROSANU

Une proposition de loi non-linéaire régissant le comportement des matériaux élastiques isotropes consiste souvent à généraliser la loi linéaire de Hooke, valable en petites déformations, par l'adjonction de termes supplémentaires afin de tenir compte d'effets du second ordre, du troisième ordre, etc. Pour les matériaux incompressibles, les modèles se réduisent à la loi de Hooke en petites déformations.

## 1. INTRODUCTION

Le but de cet article est d'étudier la déformation d'un tube cylindrique soumis à des pressions intérieures et extérieures uniformes, ayant comme point de départ le cas d'une sphère que nous avons étudié dans [14].

Dans la Section 2 on considère que le matériau du cylindre est élastique, homogène, isotrope, la déformation étant mise en évidence à l'aide d'une fonction qui est dépendante du vecteur de position (de chaque point du matériau). D'abord, on obtient dans ce cas la forme des équations d'équilibre, et puis on considère le matériau hyperélastique et on introduit l'énergie de déformation  $W$ . Dans la Section 3 il y a des exemples pour des cas particuliers de la forme de l'énergie de déformation  $W$ . Dans la Section 4 on étudie comme application le cas d'un matériau élastique, soumis aux grandes déformations. Dans la Section 5 on donne une solution numérique obtenue grâce à la fonction ODE23 du paquet de programmes MATLAB [7].

Cette méthode utilise l'algorithme de Runge-Kutta d'ordre deux et trois et elle est bien adaptée aux problèmes de Cauchy pour les systèmes d'équations différentielles du premier ordre. Le problème que nous étudions est un problème bilocal et l'on a utilisé la méthode "du tir" ("shooting method") pour transformer ce problème dans un problème de Cauchy.

On obtient la solution numérique sous une forme graphique, en exprimant tant le vecteur de position final du point P de la sphère en fonction du vecteur de position initial du même point que les composantes du tenseur de Piola Kirchhoff de la première espèce en coordonnées sphériques. Dans le cas des petites

---

\* Universitatea "Politehnica" București, Splaiul Independenței 313, 77206 București, Romania, E-mail: danap@mathem.pub.ro

déformations, cas dans lequel la loi de comportement devient la loi de Hooke utilisée en élasticité linéaire, le problème considéré se simplifie car plusieurs termes de l'équation sont négligeables et la solution peut être obtenue sous une forme analytique. Dans ce cas on fait une comparaison entre les solutions analytiques et numériques en obtenant une approximation très bonne.

## 2. CINEMATIQUE DU PROBLEME

Soit un tube cylindrique circulaire, dont la géométrie référence est définie, par rapport aux coordonnées polaires  $(R, \Theta, Z)$ , de manière suivante :

$$0 \leq A \leq R \leq B, \quad 0 \leq \Theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq Z \leq L. \quad (1)$$

Si on note avec  $(X_1, X_2, X_3)$  les coordonnées cartésiennes d'un point  $P$  du domain, dans la configuration de référence, alors nous avons :

$$X_1 = R \cos \Theta, \quad X_2 = R \sin \Theta, \quad X_3 = Z, \quad (2)$$

en accord avec la Fig. 2.1.

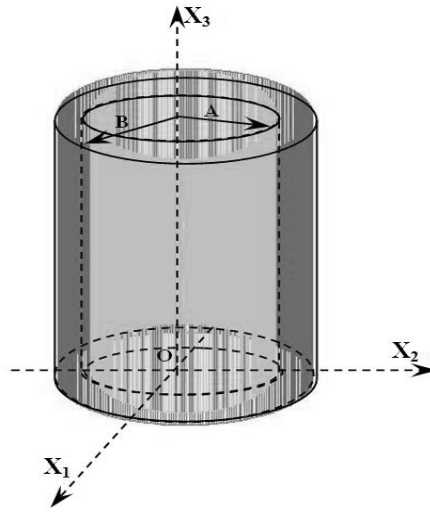


Fig. 2.1 – Le cylindre dans la configuration de référence.

On va noter avec  $(x_1, x_2, x_3)$ , respectivement  $(r, \theta, z)$  les coordonnées cartésiennes, respectivement polaires du point  $P$  dans la configuration déformée choisie, à l'instant  $t$ . En notation vectorielle, nous allons désigner par  $\vec{X}$  respectivement  $\vec{x}$  le vecteur de position du point  $P$  dans les deux configurations.

Nous admettons qu'on a une déformation du tube cylindrique obtenue en considérant qu'il est soumis aux pressions intérieures et extérieures uniformes, caractérisée par les formules :

$$r = f(R)R, \theta = \Theta, \quad z = \lambda_0 Z, \quad (3)$$

où

$$0 \leq a \leq r \leq b, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq z \leq l = \lambda_0 L, \quad (4)$$

$a$  et  $b$  étant respectivement le rayon intérieur et extérieur de la coque cylindrique après la déformation,  $\lambda_0 > 0$  une constante, la fonction  $f : [A, B] \rightarrow (0, \infty)$  étant une fonction régulière, bijective, inconnue pour instant. En générale, le problème qui se pose est de déterminer la fonction  $f$  pour des conditions aux limites données et nous allons imposer ces conditions dans ce qui suite.

Pour le tube cylindrique qui va suivre la déformation obtenue en considérant qu'il est soumis aux pressions intérieures et extérieures uniformes, caractérisée par les formules (3), (4) le gradient  $\mathbf{F}$  de la transformation est un tenseur symétrique.

Par définition [1] :

$$\mathbf{F} = \nabla \otimes \bar{\mathbf{x}}. \quad (5)$$

La définition du gradient et la dernière expression de  $\mathbf{F}$  conduisent à

$$F = \begin{pmatrix} f(R) + X_1^2 f'(R) / R & X_1 X_2 f'(R) / R & 0 \\ X_1 X_2 f'(R) / R & f(R) + X_1^2 f'(R) / R & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Il s'en suit de (6) que le gradient  $F$  est symétrique, c'est qui achève la démonstration. En supposant que  $F$  est aussi défini-positif, le théorème de décomposition polaire [4] nous assure que  $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$ , avec  $\mathbf{R}$  un tenseur orthogonal et  $\mathbf{U}$  un tenseur symétrique, défini-positif et cette décomposition est unique. Il en résulte que  $\mathbf{F} = \mathbf{U}$  et  $\mathbf{R} = \mathbf{1}$ . Soit  $(\bar{\mathbf{e}}_r, \bar{\mathbf{e}}_\theta, \bar{\mathbf{e}}_z)$  la base physique qui correspond au système de coordonnées cylindriques  $(R, \Theta, Z)$ , c'est-à-dire:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{e}}_r &= \left( \frac{\partial X_1}{\partial R}, \frac{\partial X_2}{\partial R}, \frac{\partial X_3}{\partial R} \right) = (\cos \Theta, \sin \Theta, 0), \\ \bar{\mathbf{e}}_\theta &= \frac{1}{R} \left( \frac{\partial X_1}{\partial \Theta}, \frac{\partial X_2}{\partial \Theta}, \frac{\partial X_3}{\partial \Theta} \right) = (-\sin \Theta, \cos \Theta, 0), \\ \bar{\mathbf{e}}_z &= \frac{1}{R} \left( \frac{\partial X_1}{\partial Z}, \frac{\partial X_2}{\partial Z}, \frac{\partial X_3}{\partial Z} \right) = (0, 0, 1). \end{aligned} \quad (7)$$

Par un calcul direct, on vérifie que les vecteurs  $\bar{\mathbf{e}}_R, \bar{\mathbf{e}}_\Theta, \bar{\mathbf{e}}_Z$ , donnés par la formule (7), représentent les vecteurs propres du tenseur symétrique défini-positif  $\mathbf{U}$ , qui correspondent respectivement aux valeurs propres:

$$\lambda_1 = Rf'(R) + f(R), \lambda_2 = f(R), \lambda_3 = \lambda_0. \quad (8)$$

Dans ce qui suit, nous allons considérer que le matériau de la sphère  $S$  est élastique, homogène et isotrope. Soient  $\mathbf{\Theta}$  tenseur des contraintes nominale et  $\mathbf{\Sigma}$  le tenseur des contraintes de Biot [14]. On sait que  $\mathbf{\Sigma} = \mathbf{\Theta}\mathbf{R}$  mais, comme nous avons vu dans notre cas,  $\mathbf{R} = \mathbf{1}$ , donc  $\mathbf{\Sigma} = \mathbf{\Theta}$ . Le matériau étant isotrope, il en résulte que  $\mathbf{\Sigma}$  et  $\mathbf{U}$  ont les mêmes vecteurs propres [14]. Le système des équations d'équilibre d'un corp déformable, en absence des force volumique par unité de masse, s'écrit :

$$\text{Div}\mathbf{\Theta}^\top = 0. \quad (9)$$

En coordonnées polaires ce système d'équations se réduit à une seule équation qui n'est pas identiquement satisfaite :

$$\frac{d\sigma_1}{dR} + \frac{2}{R}(\sigma_1 - \sigma_2) = 0. \quad (10)$$

Dans ce qui suit nous allons supposer que le matériau est hyperélastique, donc ayant une loi constitutive de la forme :

$$w = W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \quad (11)$$

avec  $w$  fonction symétrique. Les valeurs propres du tenseur des contraintes de Biot seront alors :

$$\sigma_i = \frac{\partial W}{\partial \lambda_i}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (12)$$

Dans ce cas d'un cylindre en matériau hyperélastique en subissant une déformation (3), en introduisant (12) dans (10) on obtient l'équation d'équilibre. On obtient ainsi une équation dans laquelle chaque des dérivées partielles de la fonction  $W$  dépendent non linéairement de  $f(R)$  et  $f'(R)$ . En général, il est très difficile à résoudre avec la fonction inconnue  $f = f(R)$  pour une fonction  $W$  donnée. Dans ce qui suit nous allons choisir  $W$  selon quelques principes de la mécanique, de manière que cette équation prends une forme simple.

### 3. L'ETUDE D'UN CAS PARTICULIER D'ENERGIE DE DEFORMATION

Dans [14] on propose une forme particulière d'énergie de déformation  $W$ , qui généralise la classe de matériaux harmoniques de la théorie plane. On prend :

$$W = G(I_1) - \nu I_2 + \mu I_3, \quad (13)$$

où

$$I_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \quad I_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1, \quad I_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \quad (14)$$

sont les invariants principaux de  $\mathbf{U}$ ,  $\nu$  et  $\mu$  sont constantes, tandis que  $G$  est une fonction qui n'est pas encore précisée. De (12), les valeurs propres de  $S$  sont :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\partial W}{\partial \lambda_1} = G'(I_1) - \nu(\lambda_2 + \lambda_3) + \mu\lambda_2\lambda_3, \\ \sigma_2 &= \frac{\partial W}{\partial \lambda_2} = G'(I_1) - \nu(\lambda_2 + \lambda_3) + \mu\lambda_1\lambda_3, \\ \sigma_3 &= \frac{\partial W}{\partial \lambda_3} = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

On suppose la configuration de référence sans contraintes et l'énergie de déformation nulle dans cette configuration donc  $\mathbf{F} = \mathbf{1}$  et alors,  $G$ ,  $\nu$  et  $\mu$  doivent satisfaire les relations :

$$G(3) - 3\nu + \mu = 0, \quad G'(3) - 2\nu + \mu = 0. \quad (16)$$

Dans ce cas, l'équation d'équilibre s'obtient en utilisant les relations (15), (10) et (8). Cette équation s'écrit analogue au cas de la sphère [14] :

$$G''(I_1) \frac{dI_1}{dR} = 0 \quad (17)$$

et elle peut être intégrée facilement. Il y a seulement deux cas :

a)  $G''(I_1) = 0$ , donc  $G(I_1) = mI_1 + n$ , avec  $m$  et  $n$  constantes. En tenant compte de (25) on obtient :

$$G(I_1) = (2\nu + \mu)I_1 - (3\nu + 4\mu). \quad (18)$$

Dans ce cas, l'équation d'équilibre (17) est satisfaite pour chaque fonction  $f = f(R)$  qui respecte (18).

b)  $G''(I_1) \neq 0$ , quel que soit  $I_1 > 0$ . Dans ce cas  $G(I_1)$  est arbitraire mais l'équation d'équilibre se réduit à  $dI_1/dR = 0$  ou, en tenant compte de (14) et (8) :

$$\frac{d}{dR} [Rf'(R) + 3f(R)] = 0. \quad (19)$$

La solution générale de (19) s'écrit :

$$f(R) = \alpha/3 + \beta/R^3. \quad (20)$$

En utilisant (14) et (8) on a alors  $I_1 = \alpha$ . En tenant compte de ce résultat et en imposant la condition que les élongations principales soit positives, on obtient  $I_1 = \alpha > 0$  et en utilisant (8) on a :

$$\lambda_1 = \frac{\alpha}{3} - \frac{2\beta}{R^3} > 0, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{R^3} > 0. \quad (21)$$

Les dernières conditions sont valables pour  $0 \leq A \leq R \leq B$  et impliquent :

$$-\alpha A^3/3 < \beta < \alpha A^3/6. \quad (22)$$

La détermination des constantes  $\alpha$  et  $\beta$  est faite, en principe, si on prend quelques conditions aux limites pour  $R = A$  et  $R = B$ , c'est-à-dire sur la frontière de la coque sphérique. Dans [14] on étudie quelques cas particuliers pour  $G$ .

#### 4. APPLICATION A UN MATERIAU ELASTIQUE A GRANDES DEFORMATIONS

Dans ce qui suit, nous allons considérer le tube cylindrique en matériau élastique, isotrope, soumis à grandes déformations. On va choisir la loi de comportement du matériau donné sous la forme suivante, de manière qu'elle généralise la loi linéaire isotrope de Hooke [11] :

$$\mathbf{\Pi} = a_1 \mathbf{E} + (a_2 - a_1) \frac{\text{tr} \mathbf{E}}{3} \mathbf{1}, \quad (23)$$

où  $\mathbf{\Pi}$  est le le tenseur de la seconde espèce de Piola Kirchhoff,

$$a_1 = 2\mu, \quad a_2 = 3\lambda + 2\mu, \quad (24)$$

avec  $\lambda, \mu$  les constantes du matériau,  $\mathbf{E} = 1/2(\mathbf{F}\mathbf{F}^T - \mathbf{1})$ ,  $\mathbf{F}$  étant le gradient de la déformation donné par (6). Alors, le tenseur de Piola Kirchhoff de première espèce sera [14] :

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}\mathbf{\Pi} = F[a_1 E + (a_1 - a_2) \frac{\text{tr} E}{3} I]. \quad (25)$$

Dans ce qui suit, nous allons choisir, pour raisons de simplicité de calcul, la constante  $\lambda_0 = 1$  (ce qu'il est toujours possible, si nous choisissons la longueur du tube cylindrique assez grand en comparaison avec ses rayons, tel que, après la déformation le changement de la dimension de la longueur soit négligeable par rapport aux changements des dimensions des rayons). Nous allons utiliser les coordonnées cylindriques en vue de mettre en évidence  $S$  pour cette déformation. Selon les relations (23), (24) et (9) en coordonnées cylindriques pour la fonction inconnue  $f = f(R)$  on obtient l'équation différentielle d'ordre deux suivante :

$$f''(R) = -\frac{f'}{R} \cdot \frac{7(2k+1)R^2 f'^2 + (29k+1)Rff' + 3(5k+4)f^2 - 3(k+2)}{3(2k+1)R^2 f'^2 + 6(2k+1)Rff' + (5k+4)f^2 - (k+2)}, \quad (26)$$

avec  $k = a_1 / a_2$  une constante du matériau, adimensionnelle. Par des calculs élémentaires on démontre que le dénominateur du membre droite de la relation (26) n'est pas nul dans l'intérieure du domaine (1) considéré.

L'équation peut être résolue, en tenant compte aussi de données à la frontière du tube cylindrique. Les conditions à la frontière peuvent être soit les pressions, soit les déplacements, soit une combinaison entre ces deux. Nous avons choisi les conditions aux frontières suivantes :

$$f(A) = a / A, f(B) = b / B \quad (27)$$

et  $l = L$ . Le problème (26), avec les conditions (27), est un problème bilocal. On sait [19] que ce problème admet une solution unique [19, 14].

## 5. SOLUTIONS NUMERIQUES

Quoique la solution du problème (26), (27), existe et elle est unique, sa forme analytique est parfois très difficile à trouver. C'est pourquoi nous avons abordé ci-dessous une méthode numérique. Nous avons utilisé la fonction ODE 23 du paquet de Programmes MATLAB. Cette fonction utilise l'algorithme Runge-Kutta d'ordre deux et trois et elle est employée pour des problèmes de Cauchy associés aux équations ou aux systèmes d'équations du premier ordre.

Le problème (26) avec les données (27), n'est pas de ce type car, d'une part, l'équation (26) n'est pas du premier ordre et, de l'autre part, les données (27) ne sont pas des données initiales mais elle sont des données à la frontière. Les deux aspects seront examinés dans ce qui suit et nous allons montrer comment on peut surmonter ces difficultés.

Evidemment, on peut associer d'une manière canonique au problème bilocal (26), (27) dans lequel l'équation différentielle est du second d'ordre un autre dans lequel l'équation (26) sera remplacée par un système d'équations différentielles du

premier ordre équivalent à cette équation. En effet, en considérant  $f_1 = f'$ ,  $f_2 = f$  dans (26) on obtient le système

$$f''(R) = -\frac{f'}{R} \cdot \frac{7(2k+1)R^2 f'^2 + (29k+1)Rff' + 3(5k+4)f^2 - 3(k+2)}{3(2k+1)R^2 f'^2 + 6(2k+1)Rff' + (5k+4)f^2 - (k+2)},$$

$$f_2' = f_1.$$

Nous utilisons d'abord le méthode du "tir" (shooting method) [19], [14], pour associer au problème obtenu des problème de Cauchy et, ainsi, résoudre le problème. Cette méthode permet d'associer au problème bilocal considéré des problèmes de Cauchy de la forme :

$$f'(R) = -\frac{f'}{R} \cdot \frac{7(2k+1)R^2 f'^2 + (29k+1)Rff' + 3(5k+4)f^2 - 3(k+2)}{3(2k+1)R^2 f'^2 + 6(2k+1)Rff' + (5k+4)f^2 - (k+2)}, \quad (28)$$

$$f(A) = a/A, \quad f'(A) = u.$$

On sait [19] que le problème de Cauchy associé à un problème bilocal admet une solution unique en mêmes conditions que le problème bilocal. Donc le problème de Cauchy (28) admet une solution qui est unique.

Après avoir résoudre ce problème, on considère pour la solution trouvée la valeur  $f(B)$  et on répète le procédé jusque'au moment où cette valeur s'approche avec l'approximation désirée de la valeur donnée dans la deuxième partie de la relation (27). Comme conséquence du théorème d'existence et unicité de la solution, la solution du problème (28) qui vérifie en même temps (27) est la solution cherchée.

La solution sera obtenue sous une forme graphique. On met en évidence la dépendance du rayon final du tube cylindrique comme fonction du rayon initial  $r = r(R)$  (donc le déplacement).

Remarques. Dans le cas des petites déformations, quand la loi de comportement se réduit à la loi de Hooke d'élasticité linéaire, le problème devient plus simple, car il y a des termes de l'équation qui sont négligeables et, alors, sa solution peut être déterminée analytiquement. En effet, en négligeant les termes d'ordre deux, le problème (26), (27) se réduit à:

$$Rf''(R) + 3f'(R) = 0, \quad f(A) = a/A, \quad f(B) = b/B. \quad (29)$$

La solution d'équation (29) est :

$$f(R) = A B \frac{bA - aB}{A^2 - B^2} R^{-2} + \frac{aA - bB}{A^2 - B^2}. \quad (30)$$



Dans ce cas, un étude comparatif entre la solution analytique  $ra = Rf(R)$ , (où  $f$  est donnée par (30)), et la solution numérique  $rn = Rf(R)$  (où  $f$  est obtenue par la méthode "du tir" pour le problème (26), (27)) montre une très bonne approximation.

D'autre parte, l'équation du problème bilocal (29) peut être trouvée aussi par calcul direct. Soient  $\boldsymbol{\varepsilon}$  le tenseur des petites déformations d'élasticité linéaire et  $\boldsymbol{\sigma}$  le tenseur des contraintes de Cauchy. On écrit la loi de comportement par rapport à une configuration naturelle où  $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$  et on obtient :

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{1} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (31)$$

En utilisant (31) et l'équation d'équilibre  $\text{Div} \boldsymbol{\sigma} = 0$ , en coordonnées polaires [16], on retrouve l'équation de (29).

Nous présentons ci-dessous 14 solutions numériques obtenues en utilisant la méthode que nous venons d'exposer. Les valeurs numériques choisies pour  $A, B, a, b$  sont présentées dans le Tableau 5.1 ci-dessous (l'unité de mesure est le metre); une partie des cas correspondent aux petites déformations et l'autre aux grandes déformations et les murs du tube cylindrique ont été soumis soit à élancement soit à compression.

Tableau 5.1

Valeurs numeriques pour  $A, B, a, b$

No.	$A$	$B$	$a$	$b$	No.	$A$	$B$	$a$	$b$
1.	0.10	0.105	0.10	0.107	8.	0.10	0.105	0.10	0.101
2.	0.10	0.105	0.10	0.109	9.	0.20	0.225	0.205	0.228
3.	0.10	0.105	0.10	0.111	10.	0.20	0.225	0.197	0.228
4.	0.10	0.105	0.10	0.113	11.	0.20	0.225	0.19	0.215
5.	0.10	0.105	0.10	0.115	12.	0.20	0.225	0.20	0.224
6.	0.10	0.105	0.10	0.104	13.	0.20	0.225	0.21	0.235
7.	0.10	0.105	0.10	0.1025	14.	0.20	0.225	0.18	0.205

Le matériau du tube cylindrique est un caoutchouc cellulaire [11] caractérisé par  $\lambda = 0.12$  MPa,  $\mu = 0.14$  MPa,  $a_1 = 0.28$  MPa,  $a_2 = 0.64$  MPa donc  $k = a_1 : a_2 = 0.44$ . On met en évidence la dépendance du rayon final du tube cylindrique comme fonction du rayon initial  $r = r(R)$  (donc le déplacement), à l'aide de la fonction  $f(R)$ .

Dans le cas 1–8, le rayon intérieur du tube cylindrique a été maintenu constant, et la surface extérieure a été soumise à une élancement dans les cas 1–5 et à une compression dans les cas 6–8.

Dans les cas 9 et 13 les deux surfaces du tube cylindrique ont été soumises à une élancement, tandis que dans les cas 11 et 14 les deux surfaces ont été soumises à une compression. Au cas 12, la surface intérieure du tube cylindrique a été

soumise à une élongation tandis que celle extérieure a été soumise à une compression.

Dans les cas des petites déformations, on peut observer une très bonne approximation réalisée par la solution numérique du problème (26), (27) pour la solution analytique de (29), donnée per (30).

Pour les des grandes déformations le calcul de la solution de (30) n'est pas plus justifié parce que les déformations n'étant pas petites, ne peuvent pas être négligés des terms de l'équation constitutive et ainsi, le comportement du matériau n'est pas plus proche de celui d'un matériau élastique, linéaire (Figs. 5.1–5.14).

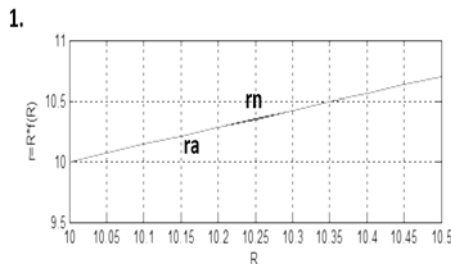


Fig. 5.1 – Solution graphique dans le cas 1.

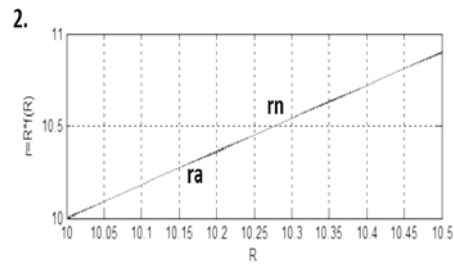


Fig. 5.2 – Solution graphique dans le cas 2.

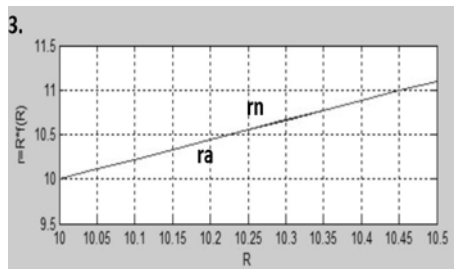


Fig. 5.3 – Solution graphique dans le cas 3.

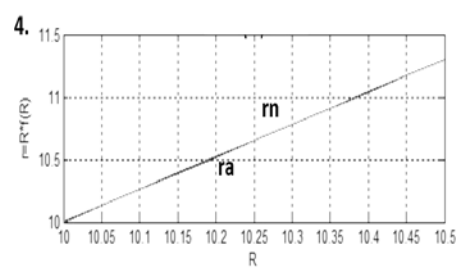


Fig. 5.4 – Solution graphique dans le cas 4.

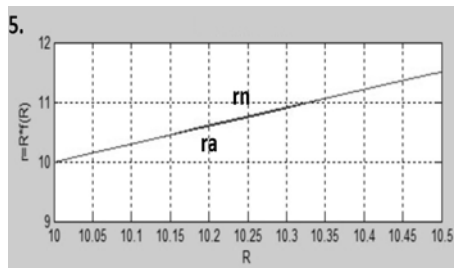


Fig. 5.5 – Solution graphique dans le cas 5.

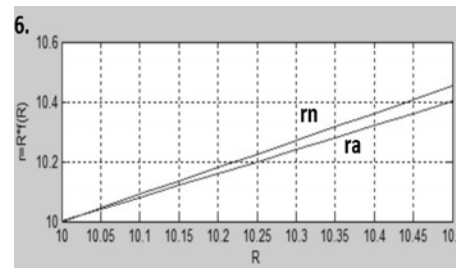


Fig. 5.6 – Solution graphique dans le cas 6.

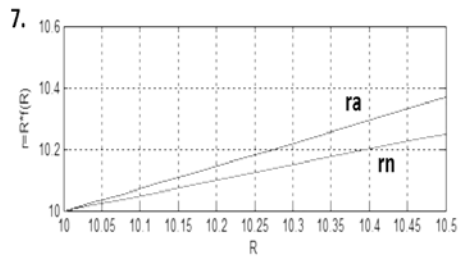


Fig. 5.7 – Solution graphique dans le cas 7.

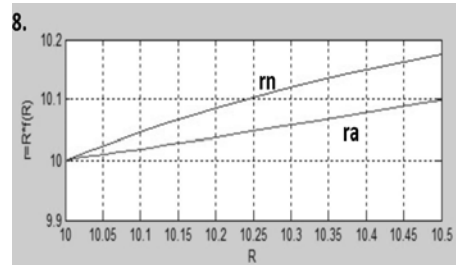


Fig. 5.8 – Solution graphique dans le cas 8.

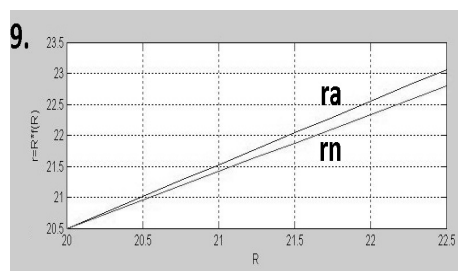


Fig. 5.9 – Solution graphique dans le cas 9.

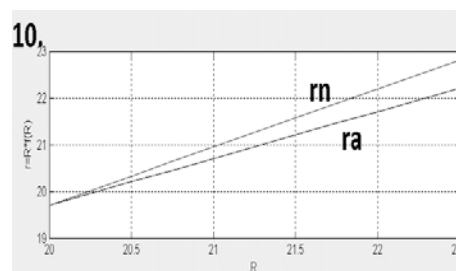


Fig. 5.10 – Solution graphique dans le cas 10.

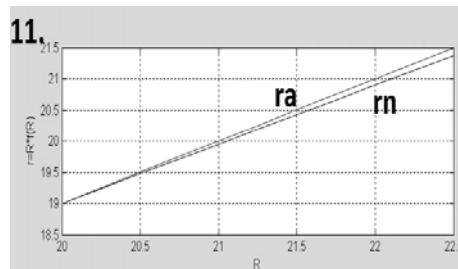


Fig. 5.11 – Solution graphique dans le cas 11.

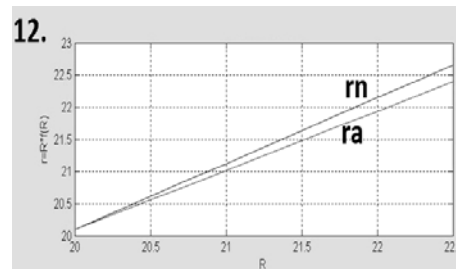


Fig. 5.12 – Solution graphique dans le cas 12.

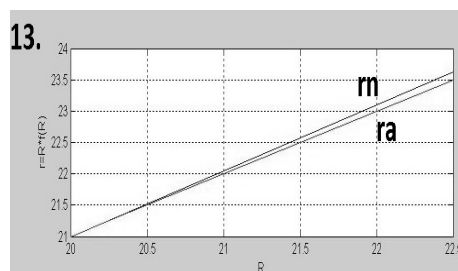


Fig. 5.13 – Solution graphique dans le cas 13.

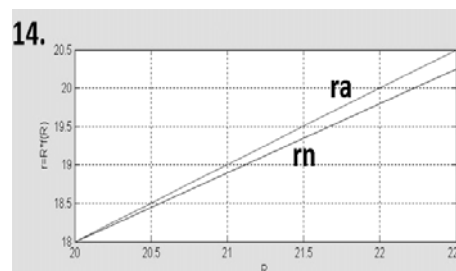


Fig. 5.14 – Solution graphique dans le cas 14.

Reçu 23 avril, 2010

## BIBLIOGRAPHIE

1. BAYLEY, P., SHAMPINE L., WALTMAN P., *Nonlinear Two Point Boundary Value Problems*, London, Academic Press, New York, 1968.
2. BEJU I., SOOS E., TEODORESCU P., *Tehnici de calcul tensorial euclidian cu aplicații*, Edit. Tehnică, București, 1977.
3. BIOT M., *Mechanics of Incremental Deformations*, John Wiley and Sons, New York, 1965.
4. CLEJA-TIGOIU S., CRISTESCU N., *Teoria plasticității cu aplicații în prelucrarea metalelor*, Litografia Universității București, București, 1985.
5. DRAGOȘ L., *Principiile mecanicii mediilor continue*, Edit. Tehnică, București, 1983.
6. ERINGEN C., *Mechanics of Continua*, J. Wiley and Sons, New York, London, Sydney, 1967.
7. GHINEA M., FIRETEANU V., MATLAB, *Calcul numeric, grafică, aplicații*, Edit. Teora, București, 1998.
8. HARTMAN P., *Ordinary Differential Equations*, J. Wiley and Sons, New York, 1964.
9. IACOB C., *Mecanica Teoretică*, Edit. Didactică și Pedagogică, București, 1971.
10. KELLER H., *Numerical Methods for Two-Point Boundary-Value Problems*, Blaisdell Publishing Company, London, 1968.
11. LAINE E., *Lois de comportement isotropes non-linéaires en grandes déformations. Application au caoutchouc*, Thèse pour l'obtention du grade de Docteur de l'Université de Poitiers, soutenance le 8 Octobre 1998.
12. MARTIN O., *Metode numerice*, Tipografia Universității "Politehnica", București, 1993.
13. MOCICA G., PETROȘANU D., *Matematici speciale, integrala curbilinie în planul complex*, Edit. Printech, București, 1998.
14. PETROȘANU, Dana Mihaela, *Sur la déformation d'un réservoirs sphérique*, Rev. Roum. Sci. Techn. – Méc. Appl., **45**, 3, pp. 309–320, 2000.
15. OGDEN R., *Non-Linear Elastic Deformations*, J. Wiley and Sons, New York, 1984.
16. OLARIU V., PREPELITA V., *Matematici speciale*, Edit. Didactică și Pedagogică, București, 1985.
17. SOÓS E., TEODOSIU C., *Calcul tensorial cu aplicații în mecanica solidelor*, Edit. Științifică și Enciclopedică, București, 1983.
18. TEODORESCU P., *Sisteme mecanice. Modele clasice*, Vol. I, II, Edit. Tehnică, București, 1984.
19. UDRISTE C., IFTODE V., POSTOLACHE M., *Metode numerice de calcul*, Edit. Tehnică, București, 1996.